MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

64. BAND, 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 6. DEZEMBER 1955)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1956

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

64. Band — **Inhalt** — 1. Heft

Seite

Singh, V., Convergence Theorems for a Generalized Laplace Integral 1
Krull, W., Über geordnete Gruppen von reellen Funktionen 10
Hsiung, Ch.-Ch., A theorem on surfaces with a closed boundary 41
Lamprecht, E., Zetafunktionen symmetrisch-erzeugbarer algebraischer Funktionenkörper mehrerer Veränderlicher 47
Laugwitz, D., Über einen Abbildungssatz von B. Sz.-Nagy 72
Ringel, G., Teilungen der Ebene durch Geraden oder topologische Geraden 79
Perron, O., Über Potenzsummen 103
Weier, J., Über Zerlegung eindimensionaler Nullstellengebilde 115

SINGH, V.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 1—9 (1956)

Convergence Theorems for a Generalized Laplace Integral

By
VIKRAMADITYA SINGH

1. Introduction

Generalizations of the Laplace integral

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} \Phi(t)\, dt, \tag{1.1}$$

or the Laplace-Stieltjes integral

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\alpha(t), \tag{1.2}$$

have been given by MEIJER [4], BOAS [1], and VARMA [5]. All these generalizations suffered from the drawback that they had lost that simplicity and elegance which had made (1.1) and (1.2) important and amenable to analytic treatment. The two main properties that make the kernel e^{-st} so easy to handle are its reproduction under the operation of differentiation i.e.

$$\frac{d}{dt} e^{-st} = -s\, e^{-st}, \tag{1.3}$$

and the simplicity of the addition formula

$$e^{-(s+s_0)t} = e^{-st}\, e^{-s_0 t}. \tag{1.4}$$

Whereas many functions can be constructed to have some property resembling (1.3) it is well known that the exponential function is the only function that possesses the property (1.4). Working on these lines VARMA [6] gave another generalization in the form

$$f(s) = \int_0^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}}\, e^{-st/2}\, W_{k,m}(st)\, d\alpha(t), \tag{1.5}$$

where $W_{k,m}(st)$ is the Whittaker function. This transform reduces to (1.2) when $m + k = \frac{1}{2}$. The kernel has a reproduction property analogous to (1.3), i.e.

$$\frac{d}{dt}\left[(st)^{m-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}st}\, W_{k,m}(st)\right] = -s\left[(st)^{m-1}\, e^{-\frac{1}{2}st}\, W_{k+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}(st)\right]. \tag{1.6}$$

It is well known that

$$W_{k,m}(z) = O(z^k\, e^{-z/2}) \qquad (|z| \to \infty,\ |\arg z| < \pi) \tag{1.7}$$

and

$$z^{m+\frac{1}{2}}\, W_{k,m}(z) = \begin{cases} O(1) & (\operatorname{Re} m > 0,\ |z| \to 0) \\ O(z^{2m}) & (\operatorname{Re} m < 0,\ |z| \to 0). \end{cases} \tag{1.8}$$

Thus the behaviour of the kernel of (1.5) is similar to e^{-st} for large values of the argument st, but for small values of the argument st it is not the same when $\mathrm{Re}\, m < 0$. This difference indicates that in the case of (1.5) there will be two abscissae of convergence, one in the s-plane and the other in the m-plane. Also, it is easily seen from (1.7) and (1.8) that there will be no abscissa of convergence in the k-plane. In the present paper we have given the formulae for the abscissae of convergence and also theorems of Abelian and Tauberian character for the transform (1.5). The inversion and representation theory of this transform will be developed in subsequent papers.

2. Abscissae of convergence

2.1. We prove a theorem which gives the abscissa of convergende σ_{cs} in the s-plane. The formula and proof are analogous to the one given for (1.2) by KNOPP [3].

Theorem 2.1. *If* $\alpha(t) = O(t^n)$ *as* $t \to 0$ *so that* $\mathrm{Re}(n+1) > 0$ *and* $\mathrm{Re}(2m+n+1) > 0$, *then the abscissa of convergence* σ_{cs} *for the integral* (1.5) *is given by the formula*

$$\sigma_{cs} = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \log |\alpha(t') - \alpha(t)| . \tag{2.1}$$

(Throughout this section t' is an integer such that $t > t' > t-1$.)

Proof. Let us put

$$p = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \log |\alpha(t') - \alpha(t)| , \tag{2.2}$$

and suppose that p is finite. (The proof can equally well be extended to the case when p is infinite.) Then, for any $\delta > 0$,

$$|\alpha(t') - \alpha(t)| < K(\delta)\, e^{\left(p + \frac{\delta}{2}\right)t}, \qquad (t > t' > T) \tag{2.3}$$

where $K(\delta)$ is a number that may depend on δ alone.

It is easy to see that for $s = \sigma + i\tau$ and $t > t' > T(\delta) + 1$

$$\left| \int_{t'}^{t} (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st)\, d\alpha(t) \right| \leq M(\delta, \sigma, \tau) \exp\left(-\sigma + p + \frac{\delta}{2}\right) t,$$

where $M(\delta, \sigma, \tau)$ is a constant that depends only on δ, σ and τ. Now, for $\sigma \geq p + \delta$ and $T_2 > T_1 > T + 1$, we have, using the above inequality,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{T_1}^{T_2} (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st)\, d\alpha(t) \right| \\ &\qquad \leq \left[\sum_{\nu = T_1' + 1}^{T_2'} \left| \int_{\nu-1}^{\nu} + \left| \int_{T_2'}^{T} + \left| \int_{T_1'}^{T} \right| \right] \right| e^{-\frac{1}{2}st} (st)^{m-\frac{1}{2}} W_{k,m}(st)\, d\alpha(t) \right| \\ &\qquad \leq M' \exp(-\delta T/2), \end{aligned}$$

where M' is a constant independent of T.

We have thus shown that the integral (1.5) converges for $\sigma \geq p + \delta$. The proof will be complete if we show that it will diverge for $\sigma \leq p - \delta$. Let us

suppose that the integral converges for $\sigma \leqq p - \delta$, then it must converge for σ' such that $p - \delta < \sigma' < p$. With the usual procedure we can show that

$$[\alpha(t) - \alpha(t')] = o(e^{\sigma' t}) \qquad (t \to \infty) \tag{2.4}$$

which is contrary to the hypothesis that $p > \sigma'$. This completes the proof.

2.2. We prove the following theorem:

Theorem 2.2. *If* $\alpha(t) = O(e^{\gamma t})$ *as* $t \to \infty$ *and* $\operatorname{Re} s > \nu$, *then the integral* (1.5) *has a negative abscissa of convergence* σ_{cm} *in the m-plane given by the formula*

$$\sigma_{cm} = -\frac{1}{2} \overline{\lim_{t \to 0}} \left[\frac{\log |\alpha(t)|}{\log t} \right]. \tag{2.5}$$

Proof. The convergence of the integral for large values of t is already guaranteed by the hypothesis, so we need only investigate the convergence at the origin. Let us put

$$l = -\frac{1}{2} \overline{\lim_{t \to 0}} \left[\frac{\log |\alpha(t)|}{\log t} \right] \qquad (l < 0); \tag{2.6}$$

then for $\delta > 0$

$$|\alpha(t)| < t^{-2l - \delta/2} \qquad (t \to 0). \tag{2.7}$$

We first show that the integral converges for $\operatorname{Re} m \geqq l + \delta$. For, integrating by parts we get

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st)\, d\alpha(t) = \left[(st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st)\, \alpha(t) \right]_{\varepsilon}^{\infty} +$$

$$+ s \int_{\varepsilon}^{\infty} (st)^{m-1} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(st)\, \alpha(t)\, dt.$$

It is easy to show that under the hypothesis the integrated term vanishes as $\varepsilon \to 0$. Also, assuming that s is real[1]),

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} (st)^{m-1} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(st)\, \alpha(t)\, dt$$

$$< M \int_{0+}^{\infty} (st)^{m-1} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(st)\, e^{\gamma t} t^{-2l-\delta/2}\, dt$$

$$= M s^{2l+\frac{\delta}{2}-1} \frac{\Gamma\left(2m - 2l - \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}\right) {}_2F_1\left(\begin{matrix} 2m - 2l - \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2},\ 2l - \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} \\ m - k - 2l - \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} \end{matrix} ; \frac{\gamma}{s} \right)}{\left[\Gamma\left(-2l - \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} \right) \right]^{-1} \Gamma\left(m - k - 2l - \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} \right)},$$

where the integral has been evaluated by the GOLDSTEIN method [2]. The series on the right hand side converges for $\sigma < \operatorname{Re} s > \gamma$. So the integral on the left hand side of the inequality converges absolutely and we get

$$\int_{0}^{\infty} (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st)\, d\alpha(t) = s \int_{0}^{\infty} (st)^{m-1} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(st)\, \alpha(t)\, dt.$$

[1]) By analytic continuation we can extend the result to complex values of S.

To show that the integral diverges for $\operatorname{Re} m \leqq l-\delta$ $(\delta<0)$ we suppose that it is not true and then show that it leads to contradiction. If the integral converges for $\operatorname{Re} m \leqq l-\delta$ then it will converge for some value m' of $\operatorname{Re} m$ such that $l-\delta<m'<l$. Let us define

$$\beta(t)=\int_0^t (st)^{m'-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m'}(st)\, d\alpha(t). \tag{2.8}$$

Then $\beta(\infty)$ exists and $\beta(0)=0$. Hence

$$\alpha(t)-\alpha(0)=\int_0^t \frac{d\beta(t)}{(st)^{m'-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m'}(st)},$$

and

$$\lim_{t\to 0}[\alpha(t)-\alpha(0)]\,(st)^{m'-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m'}(st)$$

$$=\lim_{t\to 0}(st)^{m'-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m'}(st)\int_0^t \beta(t)\,\frac{d}{dt}\left\{\frac{e^{\frac{1}{2}st}}{(st)^{m'-\frac{1}{2}} W_{k,m'}(st)}\right\} dt.$$

The integral on the right is always less than an arbitrary positive number because for small values of t, $|\beta(t)|<\varepsilon/2$. Thus

$$\alpha(t)=o(t^{-2m'}),$$

and

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log|\alpha(t)|}{\log t}=-2l>-2m'$$

which is contrary to the hypothesis that $m'<l$. Hence the theorem. The following two corollaries have also been proved in the course of the above two theorems:

Corollary 2.1. *If* $\alpha(t)=O(t^n)$ *as* $t\to 0$ *such that* $\operatorname{Re}(n+1)>0$ *and* $\operatorname{Re}(2m+n+1)>0$ *and the integral* (1.5) *converges for* $\sigma=\sigma'$ *then*

$$[\alpha(t)-\alpha(t')]=o(e^{\sigma' t}) \qquad t\to\infty.$$

Corollary 2.2. *If* $\alpha(t)=O(t^{vt})$ *for* $t\to\infty$ *and the integral* (1.5) *converges for* $\operatorname{Re} s>v$ *and* $\operatorname{Re} m<m'<0$, *then*

$$\alpha(t)=o(t^{-2m'}).$$

The following theorem is easy to prove:

Theorem 2.3. *If the integral* (1.5) *converges for* $\operatorname{Re} s=v$ *and* $\operatorname{Re} m=m'<0$ *then*

$$\alpha(t)=o(t^{-2m'}e^{vt}).$$

3. Uniform convergence near the axis of convergence

It is a common property of Laplace integrals that they converge uniformly in an angular sector near the abscissa of convergence. We show here that the integral (1.5) has a similar property. The following lemma is immediate:

Lemma 3.1. *If* t *is large and* s *and* s_0 *are non-zero, then*

$$\left|\frac{d}{dt}\left\{\frac{e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st)}{e^{-\frac{1}{2}s_0 t} W_{k,m}(s_0 t)}\right\}\right| \leq \left|\frac{s}{s_0}\right|^k |s-s_0|\, e^{-(\sigma-\sigma_0)t}. \tag{3.1}$$

Theorem 3.1. If the integral (1.5) converges for $s=s_0=\sigma_0+it_0$ and if $K>1$ then it converges uniformly in the region Δ defined by the inequalities

$$\left|\frac{s}{s_0}\right|^{m+k-\frac{1}{2}}|s-s_0|\leq 2K(\sigma-\sigma_0)\,e^{H(\sigma-\sigma_0)} \quad (H>0,\ \sigma>\sigma_0). \tag{3.2}$$

Proof. We note that if s lies in Δ then the integral (1.5) converges. Let

$$\beta(t)=\int_0^t (s_0 t)^{m-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}s_0 t}\,W_{k,m}(s_0 t)\,d\alpha(t),$$

then $\beta(\infty)$ exists and $|\beta(t)-\beta(t')|<\frac{\varepsilon}{K}$ $(t>t'>R)$. Thus

$$\int_R^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}st}\,W_{k,m}(st)\,d\alpha(t)=\left(\frac{s}{s_0}\right)^{m-\frac{1}{2}}\int_R^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}st}\,W_{k,m}(st)}{e^{-\frac{1}{2}s_0 t}\,W_{k,m}(s_0 t)}\,d\left(\beta(t)-\beta(R)\right),$$

and with the help of Lemma 3.1 we finally get

$$\left|\int_R^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}st}\,W_{k,m}(st)\,d\alpha(t)\right|\leq\left|\frac{s}{s_0}\right|^{m+k-\frac{1}{2}}\frac{\varepsilon}{2K}\,\frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}\,e^{-\mathrm{Re}\,(\sigma-\sigma_0)}.$$

Hence if s is a point in Δ other than s_0 then

$$\left|\int_R^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}st}\,W_{k,m}(st)\,d\alpha(t)\right|\leq\varepsilon$$

and in case $s=s_0$

$$\left|\int_R^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}st}\,W_{k,m}(st)\,d\alpha(t)\right|=|\beta(\infty)-\beta(R)|\leq\varepsilon.$$

This proves the theorem.

4. Abelian Theorems

(In the following s, m, k, are to be taken as real unless otherwise stated.)

Theorem 4.1. *If the integral* (1.5) *converges for* $s>0$ *and* $m>n$, *then for any* $\nu\geq -2n$ *if* $n<0$, *otherwise* $\nu>0$ *and any constant* A

$$\lim_{s\to\infty}|s^\nu f(s)-A|\leq\lim_{t\to 0+}\left|\frac{\alpha(t)\,t^{-\nu}}{\beta(\nu,m,k)}-A\right|,$$

where

$$\beta(\nu,m,k)=\frac{\Gamma(\nu+m-k+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\nu+2m)}.$$

Proof. Since the integral converges for $s>0$ we get using Goldstein's integral

$$|s^\nu f(s)-A|\leq\beta(\nu,m,k)\int_0^T\frac{(st)^{m+\nu-1}\,W_{k+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}(st)}{\exp(\frac{1}{2}st)}\left|\frac{\alpha(t)\,t^{-\nu}}{\beta(\nu,m,k)}-A\right|d(st)+$$

$$+\,s^{\nu+1}\int_T^\infty (st)^{m-1}\,e^{-\frac{1}{2}st}\,W_{k+\,,m-\frac{1}{2}}(st)\left|\alpha(t)-\frac{A\,\beta(\nu,m,k)}{t^{-\nu}}\right|dt,$$

$$=I_1+I_2.$$

But

$$I_1 \leq \beta(\nu, m, k) \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\alpha(t)\, t^{-\nu}}{\beta(\nu, m, k)} - A \right| \int_0^\infty (st)^{m+\nu-1} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(st)\, d(st)$$

$$= \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\alpha(t)\, t^{-\nu}}{\beta(\nu, m, k)} - A \right|.$$

For I_2, we observe that on account of the convergence of the integral (1.5) for $s > 0$, we have

$$|\alpha(t) - A\, t^{\nu} \beta(\nu, m, k)| < M e^{\varepsilon t}, \quad t \to \infty, \ \varepsilon > 0.$$

Hence

$$I_2 \leq M s^{\nu+1} e^{-T\left(\frac{s}{2} - \varepsilon\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st} (st + sT)^{m-1} W_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(st + sT)\, e^{\varepsilon t}\, dt$$

$$\leq M_1 s^{\nu+1} e^{-T\left(\frac{s}{2} - \varepsilon\right)},$$

because the integral on the right is convergent for all values of T and s. Thus

$$\lim_{s \to \infty} I_2 = 0;$$

and we finally get

$$\lim_{s \to \infty} |s^{\nu} f(s) - A| \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\alpha(t)\, t^{-\nu}}{\beta(\nu, m, k)} - A \right|.$$

The left hand side being indepedent of T we allow T to approach zero. Thus the theorem is proved.

Theorem 4.2. *If the integral* (1.5) *converge for* $s > \sigma_c$ *and* $m > n$ *then for any* $\nu > -2n$ *if* $n < 0$, *otherwise* $\nu > 0$ *and* $m + k + \frac{1}{2} \geq 0$ *and any constant* A

$$\lim_{s \to \sigma_c +} \left| \frac{s^{\nu+1} f(s)}{{}_2F_1\left\{\begin{matrix} 2m+\nu, & \nu+1 \\ \nu+m-k+\frac{1}{2} \end{matrix}; \frac{\sigma_c}{s}\right\}} - \sigma_c A \right| \leq \sup_{t \to \infty} \left| \frac{\alpha(t)\, t^{-\nu} e^{-\sigma_c t}}{\beta(\nu, m, k)} - A \right|.$$

Proof. Proceeding as before

$$\left| \frac{s^{\nu+1} f(s)}{{}_2F_1\left\{\begin{matrix} 2m+\nu, & \nu+1 \\ \nu+m-k+\frac{1}{2} \end{matrix}; \frac{\sigma_c}{s}\right\}} - A\, \sigma_c \right|$$

$$\leq \frac{\sigma_c s^{\nu+1}}{{}_2F_1\left\{\begin{matrix} 2m+\nu, & \nu+1 \\ \nu+m-k+\frac{1}{2} \end{matrix}; \frac{\sigma_c}{s}\right\}} \int_0^T (st)^{m-1} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(st) \left| \alpha(t) - \frac{A\, \beta(\nu, m, k)}{t^{\nu} e^{-\sigma_c t}} \right| dt +$$

$$+ \frac{\beta(\gamma, m, k)}{{}_2F_1\left\{\begin{matrix} 2m+\nu, & \nu+1 \\ \nu+m-k+\frac{1}{2} \end{matrix}; \frac{\sigma}{s_c}\right\}} \int_T^\infty (st)^{m+\gamma-1} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(st) \left| \frac{\alpha(t)\, t^{-\gamma} e^{-\sigma_c t}}{\beta(\gamma, m, k)} - A \right| d(st)$$

$$+ \left| \frac{s^{\nu+1}(s - \sigma_c)}{{}_2F_1\left\{\begin{matrix} 2m+\nu, & \nu+1 \\ \nu+m-k+\frac{1}{2} \end{matrix}; \frac{\sigma_c}{s}\right\}} \int_0^\infty (st)^{m-1} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(st)\, \alpha(t)\, dt \right|$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Since (1.5) converges for $s>\sigma_c$ and $m>n$ we get from Theorem 2.3 that

$$|\alpha(t) - A\, t^{\nu}\, e^{\sigma_c t}\, \beta(\gamma, m, k)| < M\, e^{\sigma_c t}\, t^{-2n}.$$

Hence

$$I_1 \leq \frac{M\, s^{\nu+2n}}{{}_2F_1\left\{\begin{matrix} 2m+\nu,\ \nu+1 \\ \nu+m-k+\frac{1}{2} \end{matrix};\ \frac{\sigma_c}{s}\right\}} \int_0^{T/s} t^{m-2n-1}\, e^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sigma_c}{s}\right)t}\, W_{k+\frac{1}{2},\, m-\frac{1}{2}}(t)\, dt.$$

Now the integral on the right is always convergent for $\sigma_c/s<1$ and for $m+k+\frac{1}{2}\geq 0$

$$\lim_{s\to\sigma_c+} {}_2F_1\left\{\begin{matrix} 2m+\nu,\ \nu+1 \\ \nu+m-k+\frac{1}{2} \end{matrix};\ \frac{\sigma_c}{s}\right\} \to \infty.$$

Thus for $m+k+\frac{1}{2}\geq 0$,

$$\lim_{s\to\sigma_c+0} I_1 = 0.$$

We easily find that

$$I_2 \leq \sup_{T\leq t\leq\infty} \left| \frac{\alpha(t)\, t^{-\nu}\, e^{-\sigma_c t}}{\beta(\nu, m, k)} - A \right|.$$

Also

$$\lim_{s\to\sigma_c+0} I_3 = 0,$$

because the integral in it exists and for $m+k+\frac{1}{2}\geq 0$ it vanishes in the same way as I_1. Therefore

$$\lim_{s\to\sigma_c+0} \left| \frac{f(s)\, s^{\nu+1}}{{}_2F_1\left\{\begin{matrix} 2m+\nu,\ \nu+1 \\ m-k+\nu+\frac{1}{2} \end{matrix};\ \frac{\sigma_c}{s}\right\}} - \sigma_c A \right| \leq \sup_{T\leq t\leq\infty} \left| \frac{\alpha(t)\, t^{-\nu}\, e^{-\sigma_c t}}{\beta(\nu, m, k)} - A \right|.$$

Since the left hand side is independent of T we can take T as ∞. This proves the theorem.

5. Tauberian Theorems

We first observe that on account of the different behaviour of the kernel of the integral in (1.5) for positive and negative values of m we will get two classes of Tauberian theorems, one holding for each class. However, for $m<0$ we can write

$$\frac{f(s)}{s^{2m}} = \int_0^{\infty} (s\,t)^{-m-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}s\,t}\, W_{k,m}(s\,t)\, \frac{d\alpha(t)}{t^{-2m}}, \qquad m<0;$$

and changing the sign of m

$$\frac{f(s)}{s^{-2m}} = \int_0^{\infty} (s\,t)^{m-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}s\,t}\, W_{k,m}(s\,t)\, \frac{d\alpha(t)}{t^{2m}}, \qquad m>0,$$

because $W_{k,m}(s\,t) = W_{k,-m}(s\,t)$. Thus the theorems for the case $m<0$ can be deduced from those for $m>0$ if we replace $f(s)$ by $f(s)/s^{-2m}$ and $d\alpha(t)$ by $d\alpha(t)/t^{2m}$.

Lemma 5.1. *For* $m \geqq 0$ *and* $x > 0$

$$\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m-k+\frac{1}{2})} - e^{-x/2}\, x^{m-\frac{1}{2}}\, W_{k,m}(x) \leq x\, \frac{\Gamma(2m-1)}{\Gamma(m-k-\frac{1}{2})}.$$

Proof. Let us put

$$f(x) = \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m-k+\frac{1}{2})} - e^{-x/2}\, x^{m-\frac{1}{2}}\, W_{k,m}(x) - \frac{\Gamma(2m-1)}{\Gamma(m-k-\frac{1}{2})}$$

then for $m > 0$, $f(0) = 0$ and $f'(0) = 0$. Again because $f''(0) < 0$ the maximum of $f(x)$ is at $x = 0$ and since $f(x)$ vanishes at this point the lemma is established. We note that when $m + k = \frac{1}{2}$ this inequality reduces to the well known inequality $1 - e^{-x} \leq x$, $x > 0$.

Theorem 5.1. *If* $\alpha(t)$ *belongs to* L *in* $(0, R)$ *for every* R *and if the integral*

$$f(s) = \int_0^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}st}\, W_{k,m}(st)\, \alpha(t)\, dt, \tag{5.1}$$

converges for $s > 0$ *and* $m > 0$, *then the conditions*

$$\text{(i)} \quad \lim_{s \to 0+} f(s) \to A \quad \text{and} \quad \text{(ii)} \quad \alpha(t) = 0\left(\frac{1}{t}\right) \quad (t \to \infty)$$

imply

$$f(0+) = \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m-k+\frac{1}{2})} \int_0^\infty \alpha(t)\, dt = A.$$

Proof. Under the hypothesis (ii)

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t u\, \alpha(u)\, du = o(1). \tag{5.2}$$

Now

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m-k+\frac{1}{2})} \int_0^t \alpha(u)\, du - \int_0^\infty \alpha(u) \left(\frac{u}{t}\right)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}u/t}\, W_{k,m}\left(\frac{u}{t}\right) du \\
&= \int_0^t \left[\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m-k+\frac{1}{2})} - \left(\frac{u}{t}\right)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}u/t}\, W_{k,m}\left(\frac{u}{t}\right)\right] \alpha(u)\, du - \\
&\quad - \int_t^\infty \left(\frac{u}{t}\right)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}u/t}\, W_{k,m}\left(\frac{u}{t}\right) du \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

By the Lemma 5.1 and (5.2) $|I_1| \to 0$ as $t \to \infty$ and

$$|I_2| \leq M \sup_{t \leq u < \infty} |u\, \alpha(u)|.$$

Hence taking limit as $t \to \infty$ and using (ii) we get

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m-k+\frac{1}{2})} \int_0^t \alpha(u)\, du &= \lim_{s \to 0+} \int_0^\infty (su)^{m-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}s \cdot u}\, W_{k,m}(su)\, \alpha(u)\, du \\
&= f(0+) = A.
\end{aligned}$$

The following more general theorem can be proved likewise:

Theorem 5.2. *Let the integral* (1.5) *converge for* $s > 0$ *and let*

$$\lim_{t \to 0+} f(s) = A .$$

Then

$$\lim_{t \to \infty} \alpha(t) = A \tag{5.3}$$

if and only if

$$\beta(t) = \int_0^t u\,\alpha(u) = o(t), \qquad t \to \infty . \tag{5.4}$$

My thanks are due to Dr. R. S. VARMA for his kind interest in the paper.

References

[1] BOAS jr., R. P.: Generalized Laplace Integrals. Bull. Amer. Math. Soc. **48**, 286—294 (1942). — [2] GOLDSTEIN, S.: Operational Representation of Whittakers Confluent Hypergeometric Function and Webers Parabolic Cylinder Function. Proc. London Math. Soc. **34**, 103—125 (1932). — [3] KNOPP, K.: Über die Konvergenzabszisse des Laplace Integrals. Math. Z. **54**, 291—296 (1951). — [4] MEIJER, C. S.: Eine neue Erweiterung der Laplace Transformation I. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch. Amsterdam **44**, 727—737 (1941). — [5] VARMA, R. S.: A Generalization of Laplace's Transform. Current Sci. (Bangalore, India) **16**, 17—18 (1947). — [6] VARMA, R. S.: On a Generalization of Laplace Integral. Proc. Nat. Acad. Sci. India A **20**, 209—216 (1951). — [7] WIDDER, D. V.: Laplace Transform. Princeton: University Press 1941.

Dept. of Math., Delhi University (India), and
Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh

(Eingegangen am 18. Januar 1955)

KRULL, W.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 10—40 (1956)

Über geordnete Gruppen von reellen Funktionen

Von
WOLFGANG KRULL

Im folgenden sollen hauptsächlich einige auf den ersten Blick „pathologisch" wirkende Eigenschaften gewisser Abelscher Gruppen betrachtet werden, die durch die Überschreitung der Grenze des Abzählbaren bedingt sind. Gerechtfertigt wird die Untersuchung dadurch, daß die betrachteten Gruppen nicht nur sehr einfach definiert werden können, sondern auch wenigstens in Spezialfällen große praktische Bedeutung besitzen. Es dürfte unter diesen Umständen nicht zulässig sein, ihre „pathologischen" Eigenschaften einfach als Kuriositäten abzutun. Diese zu untersuchenden Gruppen können allgemein so charakterisiert werden: Es sei M eine beliebige Menge, B die BOOLEsche Algebra aller Untermengen von M; unter P möge ein echtes Teilsystem von B verstanden werden, das mit A alle $\mathsf{N} \subseteq A$ und mit A_1, A_2 stets auch $A_1 \cup A_2$ enthält. F sei eine additive Gruppe von reellwertigen, überall auf M definierten Funktionen, und es bedeute $\tilde{F}$ die Gruppe, die aus F entsteht, wenn man $f \in F$, $g \in F$ schon dann als gleich ansieht, falls $f - g$ nur auf einer zu P gehörigen Menge von 0 verschieden ist. — Das bekannteste Beispiel für Gruppen F liefert die LEBESGUEsche Integrationstheorie. Hier ist M ein m-dimensionales Intervall oder auch ein anderes passendes Teilstück eines m-dimensionalen euklidischen Raumes ($m = 1, 2, \ldots$), und es besteht P aus allen den Untermengen von M, die das Maß 0 besitzen. Das einfachste Beispiel dagegen (in Zukunft geradezu unser *Musterbeispiel* $\tilde{G}_0$) erhält man, wenn man für $F = G_0$ die Gruppe aller *ganzzahligen* Funktionen auf einer *abzählbaren* Menge M_0 und für P_0 das System aller *endlichen* Untermengen von M_0 wählt. Die Betrachtung des Musterbeispiels wird vor allem durch die Zahlentheorie nahegelegt. Ist nämlich M_0 die Menge aller additiv geschriebenen π-adischen Bewertungen eines endlich-algebraischen Zahlkörpers, so wird $\tilde{G}_0 = G_0/D_0$ die Faktorgruppe von G_0 nach der aus allen fast überall auf M_0 verschwindenden, ganzzahligen Funktionen bestehenden Divisorengruppe D_0, und da nicht nur D_0 sondern auch G_0 in der Arithmetik eine wichtige Rolle spielt, erscheint es nicht abwegig, auch einmal $\tilde{G}_0$ näher zu untersuchen.

Jede Gruppe von $\tilde{F}$ besitzt eine *natürliche Ordnung* $\tilde{\mathfrak{O}}$ entsprechend der Tatsache, daß an jeder einzelnen Stelle $\mu \in \mathsf{M}$ der Unterschied zwischen positiven und negativen Funktionswerten von vornherein gegeben ist. Nach einem bekannten, allgemeinen *Konjunktionssatz* läßt sich die Ordnung $\tilde{\mathfrak{O}}$ stets als Konjunktion von totalen Ordnungen $\tilde{\mathfrak{T}}_\tau$ von $\tilde{F}$ darstellen (vgl. § 1, wo die benutzten Bezeichnungen näher erläutert sind). Da es grundsätzlich wünschenswert ist, die praktische Bedeutung des Konjunktionssatzes an

möglichst vielen einfachen, aber nicht trivialen Beispielen nachzuprüfen, stellen wir uns die *Hauptaufgabe, bei den Gruppen $\tilde{F}$ eine Konjunktionsdarstellung explizit anzugeben und die dabei auftretenden totalen Ordnungen näher zu untersuchen.* Es ist leicht zu sehen, daß *ein* Weg sicher zur Lösung des Problems führt, der gleichzeitig der einzig mögliche sein dürfte, wenn man keine einschränkenden Voraussetzungen über M, F und P machen will: Man hat in der Booleschen Algebra B in üblicher Weise den Begriff des Ultrafilters Φ einzuführen. Dann zeigt sich zunächst, daß jedem Φ eine totale Ordnung $\mathfrak{T}_\Phi$ von F entspricht. Die $\tilde{\mathfrak{T}}_\Phi$ wiederum liefern ein System von totalen Ordnungen $\tilde{\mathfrak{T}}_\Phi$ von $\tilde{F}$, dessen Konjunktion gerade $\tilde{\mathfrak{O}}$ ist (§ 3). Damit ist jedenfalls eine wichtigere Reduktion gewonnen. Man ist gewissermaßen von $\tilde{F}$ auf M zurückgekommen. Aber gleichzeitig erhebt sich sofort eine weitere Frage, nämlich die nach einer genaueren Beschreibung der Ultrafilter Φ, die die Grundlage für die Lösung des Konjunktionsproblems bilden. Eine eingehende Diskussion des Sinnes dieser Frage, die in § 2 vorweggenommen wird, führt im Falle einer abzählbaren Menge M_0 auf die *Vermutung der Äquivalenz aller nichttrivialen Ultrafilter*, die allerdings nur plausibel gemacht werden kann[1]). Denn ein strenger Beweis müßte voraussichtlich eine *explizite Darstellung* der Ultrafilter benützen, und eine genauere Überlegung zeigt, daß eine solche Darstellung zwar nicht geradezu als unmöglich anzusehen ist, daß aber ihre Konstruktion ungewöhnliche Schwierigkeiten machen dürfte, da kein nichttrivialer Ultrafilter eine abzählbare Basis besitzt. — Glücklicherweise ist auch ohne eine explizite Darstellung der Ultrafilter Φ eine genauere Untersuchung der durch sie definierten totalen Ordnungen $\mathfrak{T}_\Phi$ in weitem Umfange möglich (§ 4). Es zeigt sich, daß im allgemeinen für die zu einer $\mathfrak{T}_\Phi$ gehörigen natürlichen Topologie keinerlei Abzählbarkeitsaxiom gilt. — In § 5 wird an drei einfachen Beispielen kurz eine naheliegende und vor allem durch den Zusammenhang mit der Integrationstheorie bemerkenswerte Methode erläutert, mit deren Hilfe bei vielen speziellen Gruppen $\tilde{F}$ das Konjunktionsproblem ohne Rückgriff auf die Ultrafilter gelöst werden kann. In § 6 wird unter Beschränkung auf das Musterbeispiel $F = G_0$ gezeigt, daß aus einer einzigen totalen, einer trivialen Bedingung genügenden Ordnung $\tilde{\mathfrak{T}}_0$ von $\tilde{F}$ stets ein System von totalen Ordnungen $\tilde{\mathfrak{T}}_\varrho$ „gleichen Typs" abgeleitet werden kann, dessen Konjunktion gerade die natürliche Ordnung $\tilde{\mathfrak{O}}$ wird, sofern nur die $\tilde{F}$ definierende Menge P eine abzählbare Basis besitzt. — In § 7 handelt es sich nicht mehr um das Konjunktionsproblem. Es wird untersucht, wann in einer Gruppe $\tilde{F}$ jede nach unten beschränkte Folge $\tilde{f}_i$ eine untere Grenze hat. § 8 verallgemeinert den bekannten Satz, daß die Gruppe G_0 des Musterbeispiels kein freier $\mathfrak{Z}$-Modul ist. Es wird dabei an Stelle von G_0 die als $\mathfrak{Z}$-Modul aufgefaßte Gruppe M aller Funktionen auf einer beliebigen unendlichen Menge M betrachtet, bei denen die Funktionswerte einem beliebigen echten Integritätsbereich $\mathfrak{Z}$ entnommen sind.

[1]) In der Tat ist die Äquivalenzvermutung falsch vgl. den Zusatz bei der Korrektur am Schlusse der Arbeit.

§ 1. Bezeichnungen [2])

Es werden additiv geschriebene Abelsche Gruppen $G, H, \ldots$ mit Elementen $f, g, \ldots$ und den Einheitselementen o betrachtet. Unter einer *Unterhalbgruppe* O von G verstehen wir eine von G selbst verschiedene, additiv abgeschlossene o enthaltende Untermenge. Die Unterhalbgruppe $O = T$ heißt *T-Halbgruppe*, wenn von zwei Elementen $f, -f$ aus G stets mindestens eines zu T gehört. Von einer *Ordnung* $\mathfrak{O}$ von G wird gesprochen, wenn für gewisse (aber nicht für alle) Elementepaare f, g eine transitive Beziehung $f > g$ definiert ist, derart daß stets $f > f$, und daß aus $f > g$ immer $x + f > x + g$ für alle $x \in G$ folgt. Ist gleichzeitig $f > g$, $g > f$, so nennen wir f und g *ordnungsgleich* (hinsichtlich $\mathfrak{O}$). Die Ordnung $\mathfrak{O}$ heißt *streng*, wenn zwei verschiedene Elemente aus G niemals ordnungsgleich sind, sie heißt *total*, wenn für jedes Elementepaar f, g aus G immer mindestens eine der beiden Relationen $f > g$, $g > f$ gilt. *Positiv* in $\mathfrak{O}$ wird f genannt, wenn $f > 0$; ein *echt* positives Element ist ein positives, zu o nicht ordnungsgleiches Element. — Die Menge aller positiven Elemente bildet eine Unterhalbgruppe O von G, „*die* zu $\mathfrak{O}$ gehörige Halbgruppe"; ist umgekehrt $\mathfrak{O}$ eine beliebige Unterhalbgruppe von G und setzt man fest, daß dann und nur dann $f > g$ sein soll, wenn $f - g \in O$, so erhält man eine Ordnung $\mathfrak{O}$ von G, die gerade O als zugehörige Halbgruppe besitzt. Ordnungen und Unterhalbgruppen von G entsprechen also einander umkehrbar eindeutig. In der zu $\mathfrak{O}$ gehörigen Halbgruppe O bildet die Menge aller zu o ordnungsgleichen Elemente die größte Untergruppe H_O. In der Restklassengruppe G/H_O definiert die Unterhalbgruppe O/H_O eine *strenge* Ordnung, die mit $\mathfrak{O}/H_O$ bezeichnet wird. Die Gruppe G ist dann und nur dann die kleinste O umfassende Gruppe [also gleich der Menge aller Differenzen $f - g$ $(f \in O,\ g \in O)$], wenn zu jedem $h \in G$ ein $f \in O$ existiert, derart daß $f > h$ in der durch O bestimmten Ordnung $\mathfrak{O}$. Im folgenden nehmen wir stillschweigend an, daß diese Bedingung stets erfüllt ist. — Die Ordnung $\mathfrak{O}$ ist dann und nur dann total, wenn die zugehörige Halbgruppe $O = T$ eine T-Halbgruppe darstellt. Gibt es für eine Halbgruppe O in G endlich oder unendlich viele T-Oberhalbgruppen T_τ, derart daß $O = \bigcap_\tau T_\tau$ wird, so nennt man die durch O definierte Ordnung $\mathfrak{O}$ die *Konjunktion* der durch die T_τ bestimmten totalen Ordnungen $\mathfrak{T}_\tau$. Es gilt der wohlbekannte Satz: $\mathfrak{O}$ *ist dann und nur dann Konjunktion von totalen Ordnungen* $\mathfrak{T}_\tau$, *wenn ein*

[2]) Analog wie BOURBAKI [1], aber im Gegensatz zu BIRKHOFF [1] reden wir schon dann von einer *geordneten* (und nicht nur einer halbgeordneten) Gruppe, wenn zwar für gewisse Elementepaare f, g eine Beziehung $f > g$ definiert ist, wenn es aber Paare f, g gibt, bei denen weder $f > g$ noch $g > f$. Auch sonst schließen wir uns terminologisch möglichst an BOURBAKI an. Man beachte aber folgende wichtige Unterschiede: a) Wir lassen die Möglichkeit zu, daß für gewisse Elementepaare $f, g \neq f$ sowohl $f > g$ als auch $g > f$. Eine Ordnung im Sinne des Textes ist also im Sinne von BOURBAKI unter Umständen nur eine „Vorordnung" (préordre). — b) Wir sprechen z. B. von „reellwertigen Funktionen auf M" und nicht von „Abbildungen von M in die Additionsgruppe der reellen Zahlen". (Dabei bezeichnen wir allerdings eine Funktion an sich immer nur durch einen einzelnen Buchstaben $f, g, \ldots$ ohne beigefügtes Argument. $f(\mu), g(\lambda), \ldots$ wird nur geschrieben, wenn der Funktionswert an der festen Stelle $\mu, \lambda, \ldots$ gemeint ist.)

Element $f \in G$ stets positiv ist, falls $n \cdot f > 0$ für hinreichend großes ganz positives n [3]).

Es sei jetzt M eine beliebige Menge von „Argumentwerten" oder „Indizes" μ und es bedeute R bzw. G die additive Gruppe aller überall auf M eindeutig definierten *reellwertigen* bzw. *ganzzahligen* Funktionen; mit F bezeichnen wir eine nicht weiter festgelegte Untergruppe von R oder G. — Ist f eine beliebige Funktion aus F, so bedeute $\Lambda(f)$ bzw. $\Lambda^-(f)$ bzw. $\Lambda(f \neq 0)$ die Menge aller der $\mu \in \mathsf{M}$, für die $f(\mu) \geqq 0$ bzw. $f(\mu) < 0$ bzw. $f(\mu) \neq 0$. In entsprechendem Sinne sind Bezeichnungen wie $\Lambda(f > n)$, $\Lambda(f > g)$, ... aufzufassen. Unter O verstehen wir stets diejenige Unterhalbgruppe von F, die aus allen Funktionen f mit $\Lambda(f) = \mathsf{M}$, $\Lambda^-(f) = 0$ [4]) besteht. Die durch O bestimmte, natürliche Ordnung $\mathfrak{O}$ kann offenbar auch so eingeführt werden: „$f > g$ dann und nur dann, wenn $f(\mu) \geqq g(\mu)$ für alle $\mu \in \mathsf{M}$." Man sieht sofort, daß $\mathfrak{O}$ die Bedingung „$n \cdot f > 0 \to f > 0$" erfüllt, daß also $\mathfrak{O}$ als Konjunktion von totalen Ordnungen und dementsprechend O als Durchschnitt von T-Halbgruppen dargestellt werden kann. Die explizite Angabe von solchen Darstellungen ist das Hauptproblem der nächsten Paragraphen.

§ 2. Filter und Antifilter [5])

Es sei M eine beliebige unendliche Menge, B das System aller Untermengen von M. Ein Teilsystem Ψ von B soll wie üblich *Filter* genannt werden, wenn mit Λ_1, Λ_2 stets auch $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ und jede Obermenge von $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ zu Ψ gehört, wenn aber $\emptyset \notin \Psi$. *Ultrafilter* soll $\Psi = \Phi$ heißen, wenn zusätzlich folgende Bedingung erfüllt ist: Aus $\mathsf{M} = \mathsf{M}_1 \cup \mathsf{M}_2$, $\mathsf{M}_1 \notin \Phi$ folgt stets $\mathsf{M}_2 \in \Phi$. — Dual dazu bezeichnen wir ein M selbst nicht enthaltendes Teilsystem P von B als *Antifilter*, wenn mit Λ_1, Λ_2 immer auch $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ und jede Untermenge von $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ in P liegt. $\mathsf{P} = \Pi$ wird *Antiultrafilter* genannt, wenn aus $\emptyset = \mathsf{M}_1 \cap \mathsf{M}_2$, $\mathsf{M}_2 \notin \Pi$ immer $\mathsf{M}_1 \in \Pi$ folgt.

Es gelten dann die im wesentlichen bekannten und im übrigen mühelos zu verifizierenden Sätze: *Ist Ψ ein Filter, so ist das komplementäre System aller Mengen $\mathsf{M} - \Lambda$ ($\Lambda \in \Psi$) ein Antifilter P und umgekehrt. Dabei ist dann und nur dann $\Psi = \Phi$ ein Ultrafilter, wenn $\mathsf{P} = \Pi$ einen Antiultrafilter darstellt.* $\Psi = \Phi$ ist dann und nur dann ein Ultrafilter, wenn der komplementäre Antifilter $\mathsf{P} = \Pi$ aus *allen* nicht in Ψ liegenden Untermengen von M besteht, $\mathsf{P} = \mathsf{B} - \Psi$; entsprechend umgekehrt. — Treten im folgenden Ψ und P bzw.

[3]) Zum Beweis des Konjunktionssatzes vgl. Lorenzen [1], § 4.

[4]) $\emptyset$ bedeutet stets die leere Menge.

[5]) Bei der Einführung von Filtern und Ultrafiltern schließen wir uns im wesentlichen an Bourbaki [3] an. Auch unsere „Antifilter" können als Filter im Sinne Bourbakis gedeutet werden. Die an sich vielleicht näher liegende Bezeichnung „Dualfilter" wurde vermieden, um sachlich nicht gerechtfertigte Assoziationen mit dem „Moduldual" auszuschließen. Bei Satz 1 von § 2 und den anschließenden Betrachtungen haben wir uns sehr kurz gefaßt, da es sich im wesentlichen um bekannte Dinge handelt, — zur Boole-schen Algebra vgl. etwa Birkhoff [1] —, die also des Zusammenhangs wegen nicht ausgelassen werden konnten. Ebenso wurde die Klassifikation der Filter mit abzählbarer Basis möglichst knapp behandelt. Denn sie war nur nötig, um die Bedeutung des Problems der Ultrafilternormalform schärfer herauszuarbeiten.

Φ und Π gekoppelt auf, so bedeutet stets $\mathfrak{P}$ bzw. Π den zu dem Filter bzw. Ultrafilter Ψ bzw. Φ komplementäre Antifilter bzw. Antiultrafilter.

Satz 1. *Es sei* $\mathfrak{P}$ *ein Antifilter aus* $\mathfrak{B}$ *und* Ψ' *irgendein zu* $\mathfrak{P}$ *elementefremder Filter. Dann gibt es stets ein komplementäres Paar* Π, Φ *derart, daß der Antiultrafilter* Π *bzw. der Ultrafilter* Φ *einerseits* $\mathfrak{P}$ *bzw.* Ψ' *umfaßt und andererseits zu* Ψ' *bzw.* $\mathfrak{P}$ *elementefremd ist. (Grenzfälle* $\mathfrak{P} = \{\emptyset\}$ *bzw.* $\Psi = \{\mathfrak{M}\}$ *eingeschlossen.)*

Will man den Beweis von Satz 1 nicht direkt führen, sondern aus der Idealtheorie ableiten, so hat man nur zu beachten: Es sei B die zu $\mathfrak{M}$ gehörige BOOLEsche *Algebra*, d.h. der Ring aller Funktionen $a, b, \ldots$ auf $\mathfrak{M}$ mit Werten aus dem Primkörper K_2 der Charakteristik 2. Ordnet man jedem $\mathfrak{N} \in \mathfrak{B}$ die durch $a(\mu) = 1$ $(\mu \in \mathfrak{N})$; $a(\mu) = 0$ $(\mu \notin \mathfrak{N})$ definierte Funktion $a \in B$ zu, so entsteht eine kanonische Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf B und es gilt, falls $\mathfrak{N}_i \leftrightarrow a_i$ $(i = 1, 2)$:

$$(1) \qquad \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \leftrightarrow a_1 \cdot a_2; \qquad (\mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2) - (\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2) \leftrightarrow a_1 + a_2.$$

Aus (1) folgt mühelos: Ein Teilsystem $\mathfrak{J} \neq B$ von B ist dann und nur dann ein Ideal, wenn das Bild $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{J}$ ein Antifilter ist. $\mathfrak{J} = \mathfrak{P}$ ist dann und nur dann ein Primideal, wenn $\mathfrak{P} = \Pi$ einen Antiultrafilter darstellt. Beim Übergang von $\mathfrak{B}$ zu B erscheint Satz 1 als ein Spezialfall des folgenden allgemeinen Theorems der Idealtheorie: Ist $\mathfrak{J}$ ein Ideal, M ein zu $\mathfrak{J}$ elementefremdes, multiplikativ abgeschlossenes System, so gibt es immer ein zu M elementefremdes Primoberideal von $\mathfrak{J}$.

Bei den weiteren Betrachtungen bevorzugen wir die Filter und Ultrafilter. Die Übertragung der Ergebnisse auf Antifilter und Antiultrafilter erfordert nur eine triviale Dualisierung. Eine eindeutig umkehrbare Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf sich selbst, soll kurz *Permutation* genannt werden. Zwei Filter Ψ_1 und Ψ_2 sollen *äquivalent* heißen, wenn eine Permutation von $\mathfrak{M}$ existiert, die Ψ_1 in Ψ_2 überführt. Wir sagen, eine Untermenge $\{\ldots, \mathfrak{N}_\tau, \ldots\}$ von $\mathfrak{B}$ bilde eine *Basis* von Ψ und schreiben $\Psi = (\ldots, \mathfrak{N}_\tau, \ldots)$, wenn Ψ aus den $\mathfrak{N}_\tau$ und ihren sämtlichen Obermengen besteht. Besitzt Ψ eine endliche bzw. abzählbare Basis, so nennen wir Ψ selbst *endlich* bzw. *abzählbar*. Für endliche Filter erhält man mühelos die Sätze:

1. Ψ ist dann und nur dann *endlich*, wenn $\Psi = (\mathfrak{N})$ eine *eingliedrige Basis* hat.

2. $\Psi = (\mathfrak{N})$ ist dann und nur dann ein *Ultrafilter* $\Psi = \Phi$, wenn $\mathfrak{N} = \{\mu\}$ nur aus einem einzigen Element μ besteht.

3. Zwei endliche Filter $\Psi_1 = (\mathfrak{N}_1)$, $\Psi_2 = (\mathfrak{N}_2)$ sind dann und nur dann *äquivalent*, wenn nicht nur $\mathfrak{N}_1$ *und* $\mathfrak{N}_2$ sondern auch $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}_1$ *und* $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}_2$ die *gleiche Mächtigkeit* besitzen.

Zu 1. beachte man: Ist $\Psi = (\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n)$, so muß nach Definition des Filters $\mathfrak{N}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{N}_n$ gleich einer der Mengen $\mathfrak{N}_i$ sein. Dann wird aber schon $\Psi = (\mathfrak{N}_i)$. — Bei 2. ist das „dann" trivial. Für das „nur dann" ist zu überlegen: Ist $\mathfrak{N}$ Vereinigungsmenge der elementefremden Untermengen $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$, so muß in einem $\mathfrak{N}$ enthaltenden Ultrafilter Φ wegen $\mathfrak{M} = ((\mathfrak{M} - \mathfrak{N}) \cup \mathfrak{N}_1) \cup \mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_1 = ((\mathfrak{M} - \mathfrak{N}) \cup \mathfrak{N}_1) \cap \mathfrak{N}$ immer auch eine der Mengen $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ auftreten. —

3. Folgt einfach aus der Bemerkung, daß N_1 dann und nur dann durch eine Permutation von M in N_2 übergeführt wird, wenn die Bedingung von 3. erfüllt ist. Die (nach 3. sämtlich äquivalenten) Ultrafilter $\Phi = (\{\mu\})$ sollen als *triviale Ultrafilter* bezeichnet werden. Aus den beim Beweise von 2. benutzten Überlegungen folgt leicht das wichtige *Kriterium für triviale Ultrafilter:*

Jeder Ultrafilter, der eine endliche Menge enthält, ist trivial.

Als Vorbereitung für das Studium der nichttrivialen Ultrafilter untersuchen wir die abzählbaren (aber nicht endlichen) Filter, obwohl, wie sich zeigen wird, kein Ultrafilter zu dieser Klasse gehört. Es sei $\Psi = (\mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2, \ldots)$ und es bedeute Δ den wegen $\Psi + (\Delta)$ sicher nicht zu Ψ gehörigen Durchschnitt aller N_i; mit B_Δ möge die Menge aller Untermengen von $\mathsf{M} - \Delta$ bezeichnet werden. Dann bildet das System aller Mengen $\mathsf{N} - \Delta$ $(\mathsf{N} \in \Psi)$ einen Filter Ψ_Δ in B_Δ mit der Basis $(\mathsf{N}_1 - \Delta, \mathsf{N}_2 - \Delta, \ldots)$, und man überlegt sich ohne Schwierigkeit den *Hilfssatz:*

Die abzählbaren Filter $\Psi_i = (\mathsf{N}_{i1}, \mathsf{N}_{i2}, \ldots)$ $(i = 1, 2)$ sind dann und nur dann äquivalent, wenn für $\Delta_i = \bigcap_k \mathsf{N}_{ik}$ sowohl Δ_1 und Δ_2 als auch $\mathsf{M} - \Delta_1$ und $\mathsf{M} - \Delta_2$ gleiche Mächtigkeit haben und wenn gleichzeitig eine (und damit jede) Permutation von M, die Δ_1 in Δ_2 überführt, den Filter Ψ_{Δ_1} aus B_{Δ_1} auf einen zu Ψ_{Δ_2} äquivalenten Filter Ψ'_{Δ_2} aus B_{Δ_2} abbildet.

Auf Grund des Hilfssatzes braucht man im wesentlichen nur solche abzählbaren Filter $\Psi = (\mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2, \ldots)$ zu betrachten, bei denen $\bigcap_k \mathsf{N}_k = \emptyset$. Man könnte meinen, daß diese Filter zum mindesten bei abzählbaren M alle äquivalent sind. In der Tat aber gilt:

Satz 2. *Es gibt im Falle einer abzählbaren Menge* $\mathsf{M} = \mathsf{M}_0 = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *drei verschiedene Klassen äquivalenter Filter* $\Psi = (\mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2, \ldots)$ *mit* $\bigcap_k \mathsf{N}_k = \emptyset$. *Normalformen für die drei Klassen ergeben sich bei folgender Wahl der* N_k:

1. $\mathsf{N}_k = \{2^{k-1} \cdot 1,\ 2^{k-1} \cdot 2,\ 2^{k-1} \cdot 3, \ldots\}$ $\quad (k = 1, 2, \ldots)$;
2. $\mathsf{N}_k = \{k,\ k+1,\ k+2, \ldots\}$ $\quad (k = 1, 2, \ldots)$;
3. $\mathsf{N}_1 = \mathsf{M}$, $\mathsf{N}_k = \{2 \cdot (k-1),\ 2 \cdot k,\ 2 \cdot (k+1), \ldots\}$ $\quad (k = 2, 3, \ldots)$.

Man setze $\Delta_k = \mathsf{N}_1 \cap \cdots \cap \mathsf{N}_k$. Dann wird $\Psi = (\mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2, \ldots) = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots)$, $\Delta_k \geqq \Delta_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$; außerdem müssen unendlich viele Δ_k verschieden sein, da Ψ nicht endlich. Man darf also von vornherein $\Delta_k > \Delta_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ annehmen; ferner darf und soll $\Delta_1 = \mathsf{M}$ vorausgesetzt werden. Wir unterscheiden drei Fälle: 1. Unendlich viele Differenzmengen $\Delta_k - \Delta_{k+1}$ sind unendlich. Hier gewinnt man durch Weglassen passender Δ_k eine Basis $\mathsf{M} = (\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots)$, bei der alle Differenzmengen $\Delta'_k - \Delta'_{k+1}$ unendlich sind. 2. Alle Mengen $\Delta_k - \Delta_{k+1}$ sind endlich. Hier kommt man durch Einführung von Zwischengliedern zu einer Basis $\mathsf{M} = (\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots)$, bei der $\Delta'_k - \Delta'_{k+1}$ stets aus genau einem Element besteht. 3. Endlich viele Differenzmengen $\Delta_k - \Delta_{k+1}$ sind unendlich. Hier ergibt sich durch Weglassung und Einschaltung von Gliedern eine Basis $\mathsf{M} = (\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots)$, bei der $\Delta'_1 - \Delta'_2$ unendlich, während $\Delta_k - \Delta_{k+1}$ für $k \geqq 2$ immer aus genau einem Element besteht.

Daß alle Filter des Typus 1. bzw. 2. bzw. 3. zu der in Satz 2 angegebenen Normalform 1. bzw. 2. bzw. 3. äquivalent sind, ist mühelos zu verifizieren. Um einzusehen, daß die Äquivalenzklassen 1., 2., 3. verschieden sind, beachte man: Im Falle 2. ist $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ endlich für alle $\mathfrak{N} \in \Psi$. Diese Bedingung ist weder bei 1. noch bei 3. erfüllt. Im Falle 3. existiert ein $\mathfrak{N}^* \in \Psi$, derart daß $\mathfrak{N}^* - (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^*)$ endlich für alle $\mathfrak{N} \in \Psi$; im Falle 1. gibt es kein solches $\mathfrak{N}^*$.

Wir wenden uns jetzt zu den nichttrivialen Ultrafiltern. Bei einem nichttrivialen Ultrafilter Φ ist der Durchschnitt aller $\mathfrak{N} \in \Phi$ stets leer. Denn es kann ja Φ nicht Teilsystem eines nichttrivialen Ultrafilters sein. Wir zeigen weiter:

Kein nichttrivialer Ultrafilter ist abzählbar. Die Menge aller nichttrivialen Ultrafilter ist überabzählbar.

Wäre Φ abzählbar, so existierte nach den bei Satz 2 angestellten Überlegungen eine Basis $(A_1, A_2, \ldots)$ mit $A_k \supset A_{k-1}$, und wir hätten dabei $\bigcap_k A_k = \emptyset$. Setzen wir weiter $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{M} - A_1$, $\mathfrak{N}_k = A_k - A_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$; $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0 \cup \mathfrak{N}_2 \cup \mathfrak{N}_4 \cup \cdots$, $\overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_3 \cup \mathfrak{N}_5 \cup \cdots$, so ergibt sich aus $\bigcap_k A_k = \emptyset$ leicht $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \cup \overline{\mathfrak{N}}$. Es muß also entweder $\mathfrak{N}$ oder $\overline{\mathfrak{N}}$ zu Φ gehören, obwohl keine dieser beiden Mengen ein A_k enthält. Das heißt $\Phi \neq (A_1, A_2, \ldots)$. — Die Existenz von überabzählbar vielen nichttrivialen Ultrafiltern folgt leicht aus der Bemerkung: Ist $A_1, A_2, \ldots$ eine beliebige Mengenfolge mit $A_k \supset A_{k+1}$, $\bigcap_k A_k = \emptyset$, so gibt es nach Satz 1 stets einen $(A_1, A_2, \ldots)$ umfassenden, wegen $\bigcap_k A_k = \emptyset$ nichttrivialen Ultrafilter[6]). — Um zu einer ersten, groben Einteilung der nichttrivialen Ultrafilter zu kommen, definieren wir: Dem Ultrafilter Φ soll die *Minimalmächtigkeit* $\aleph$ zugeschrieben werden, wenn Φ zwar Mengen der Mächtigkeit $\aleph$ aber keine Mengen einer kleineren Mächtigkeit als $\aleph$ enthält. Es ist dann selbstverständlich, daß Ultrafilter verschiedener Minimalmächtigkeit niemals äquivalent sind. Weiter gilt:

Satz 3. *Ist $\aleph^*$ die Mächtigkeit von $\mathfrak{M}$, so gibt es für jedes zwischen $\aleph_0$ und $\aleph^*$ liegende $\aleph$ nichttriviale Ultrafilter der Minimalmächtigkeit $\aleph$. (Grenzen $\aleph_0$ und $\aleph^*$ eingeschlossen.)*

Der Beweis folgt leicht aus Satz 1. Man wähle dort für $\mathfrak{P}$ den Antifilter aller der Untermengen $\mathfrak{M}$, die eine kleinere Mächtigkeit als $\aleph$ besitzen. Für Ψ' wähle man eine geeignete Menge $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ und alle ihre Obermengen. — Nach Satz 3 gibt es bei überabzählbarem $\mathfrak{M}$ also für $\aleph^* > \aleph_0$ immer nicht äquivalente, nichttriviale Ultrafilter. Wir wenden uns jetzt speziell zu dem abzählbaren Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 = \{1, 2, \ldots\}$. Hier kann man zwei nichttriviale Ultrafilter sicher nicht mehr nach dem Typus der in ihnen auftretenden *Mengen* unterscheiden. Denn jede in einem nichttrivialen Ultrafilter vorkommende Menge hat ja die Mächtigkeit $\aleph_0$. Man könnte aber daran denken,

[6]) Genauer: Man kann zu $A_1, A_2, \ldots$ stets eine Zerlegung $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, $\emptyset = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ finden, derart daß alle Durchschnitte $A_{ik} = A_i \cap \mathfrak{M}_k$ $(i = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2)$ unendlich. Dann aber bilden $A_{1k}, A_{2k}, \ldots$ zusammen mit allen Obermengen einen Filter Ψ_k $(k = 1, 2)$ und es gibt nach Satz 1 je einen Ψ_k umfassenden Ultrafilter Φ_k $(k = 1, 2)$. Dabei hat man $\Phi_1 \neq \Phi_2$ wegen $\mathfrak{M}_1 \in \Phi_1$, $\mathfrak{M}_2 \notin \Phi_1$; $\mathfrak{M}_1 \notin \Phi_2$, $\mathfrak{M}_2 \in \Phi_2$.

die *abzählbaren Filter*, deren Struktur wir bereits beherrschen, zur Klassifikation der nichttrivialen Ultrafilter heranzuziehen. Daß auch dieser Versuch scheitern muß, zeigt:

Satz 4. *In jedem nichttrivialen Ultrafilter Φ sind unendlich viele abzählbare Filter Ψ enthalten, die einer beliebig vorgeschriebenen Äquivalenzklasse angehören.*

Wir bemerken zunächst: Es sei A eine beliebige nicht zu Φ gehörige Untermenge von M mit unendlichem Komplement $\mathsf{M}-A$, und es bedeute Ψ den Filter aller der zu Φ gehörigen Obermengen von A. Dann bildet, wie leicht zu sehen, der oben bei der Formulierung des Hilfssatzes eingeführte Filter Ψ_A einen *nichttrivialen Ultrafilter* in B_1. Unter diesen Umständen genügt es beim Beweise von Satz 4 offenbar, abzählbare Filter $(A_1, A_2, \ldots)$ mit $\bigcap_k A_k = \emptyset$ zu betrachten, d. h. es ist nur zu zeigen, daß Φ unendlich viele Filter der Typen 1., 2., 3. von Satz 2 enthält. — Aus der Ultrafiltereigenschaft von Φ schließt man nun z. B. mühelos: Es gibt in Φ einen abzählbaren Filter $(A'_1, A'_2, \ldots)$, bei dem durchweg $A'_k > A'_{k+1}$ mit $A'_k - A'_{k+1}$ unendlich. Ist ferner $\bigcap_k A'_k = \{\mu_1, \mu_2, \ldots\}$, so gehören, da Φ keine endliche Menge enthält, zu Φ auch die Mengen $A_1 = A'_1 = \mathsf{M}$, $A_k = A'_k - \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k-1}\}$ $(k = 2, 3, \ldots)$. Es enthält also Φ in Gestalt von $(A_1, A_2, \ldots)$ einen abzählbaren Filter des Typus 1. im Sinne von Satz 2. Ebenso leicht zeigt man, daß in Φ abzählbare Filter der Typen 2. und 3. vorkommen müssen. Auch daß unendlich viele Filter der drei Typen in Φ auftreten, ergibt sich sofort aus der Art der Konstruktion.

Satz 4 läßt sich anschaulich geometrisch deuten. Sei $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{A}$ die Menge aller nichttrivialen Ultrafilter bzw. aller abzählbaren Filter. Ist Φ beliebig aus $\mathfrak{R}$, so ordnen wir jedem in Φ enthaltenen Filter Ψ aus $\mathfrak{A}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}_\Psi(\Phi)$ zu durch die Festsetzung: $\Phi_1 \in \mathfrak{R}$ gehört dann und nur dann zu $\mathfrak{U}_\Psi(\Phi)$, wenn Ψ Teilsystem von Φ_1 ist. Man sieht dann sofort, daß $\mathfrak{R}$ so zu einem HAUSDORFF*schen Raum* wird, in dem die vier grundlegenden Axiome (einschließlich des Trennungsaxioms) erfüllt sind, und daß darüber hinaus der *a-Durchschnittssatz* gilt: Der Durchschnitt abzählbar vieler Umgebungen $\mathfrak{U}_{\Psi_k}(\Phi)$ eines festen Punktes Φ ist stets selbst wieder eine Umgebung $\mathfrak{U}_\Psi(\Phi)$. (Man beachte, daß der kleinste gemeinsame Oberfilter abzählbar vieler Ψ_k aus $\mathfrak{A}$ stets selbst wieder zu $\mathfrak{A}$ gehört.) Satz 4 läßt sich nun offenbar in topologischer Fassung so ausdrücken:

Satz 4*. *Bei jedem Ultrafilter Φ aus $\mathfrak{R}$ gibt es in jeder Umgebung $\mathfrak{U}_\Psi(\Phi)$ einen Ultrafilter Φ'_1, der zu einem beliebig vorgegebenen Ultrafilter Φ_1 aus $\mathfrak{R}$ äquivalent ist.*

[Um bei fester Umgebung $\mathfrak{U}_\Psi(\Phi)$ einen Φ'_1 der gewünschten Art zu gewinnen, gehe man aus von einem nach Satz 4 in Φ_1 enthaltenen zu Ψ äquivalenten Filter Ψ_1. Jede Permutation von M, die Ψ_1 in Ψ überführt, bildet Φ_1 auf einen Φ'_1 ab.] — Satz 4 führt, vor allem in der anschaulichen Fassung 4*, zwanglos auf die folgende *Äquivalenzvermutung:*

Bei abzählbarem M sind alle nichttrivialen Ultrafilter äquivalent[1]).

Allerdings muß man sich klar sein, daß die Überlegungen, die zur Aufstellung der Äquivalenzvermutung führten, für ihren *Beweis* noch keineswegs eine ausreichende Grundlage bilden. Auch der für $\mathfrak{R}$ gültige a-Durchschnittssatz hilft nichts. Denn da kein Ultrafilter abzählbar ist, gilt in $\mathfrak{R}$ bei unserer Topologisierung auch das schwächere HAUSDORFFsche Abzählbarkeitsaxiom nicht[7]). — Was man zu einem strengen Beweis der Äquivalenzvermutung wahrscheinlich brauchen wird, ist (immer für *abzählbares* M) eine *Ultrafilternormalform*. Dabei wäre folgende Definition zugrunde zu legen: Eine Ultrafilternormalform ist eine wohlbestimmte, eindeutige Abbildung einer passenden Indexmenge I in B derart, daß die Bilder N_ι aller $\iota \in I$ entweder in ihrer Gesamtheit gerade einen Ultrafilter konstituieren (Normalform in schärferem Sinne) oder zusammen mit ihren sämtlichen Obermengen einen Ultrafilter bilden (Normalform in weiterem Sinne). Die Indexmenge I kann dabei jedenfalls nicht wohlgeordnet sein. Denn ein Ultrafilter hat ja keine abzählbare Basis und von den Ordnungszahlen beherrscht man nicht einmal die volle zweite Zahlklasse. Den richtigen Fingerzeig liefert wohl die Bemerkung, daß ein Ultrafilter Φ und B selbst offenbar als Systeme von Untermengen von M die gleiche Mächtigkeit besitzen. Man wird dementsprechend B als Indexmenge wählen oder noch zweckmäßiger B, da ja die Elemente von B (als Funktionen auf M mit Werten aus K_2 oder auch als dyadische Brüche) eine unmittelbar anschauliche Darstellung besitzen. Damit kommt man bei Benutzung des schärferen Normalformbegriffs zu dem folgenden präzisen *Normalformproblem:*

Es soll (bei abzählbarem M*) eine Abbildung von* B *in* B *gefunden werden, die die Eigenschaft besitzt, daß die Bildmenge in* B *gerade einen nichttrivialen Ultrafilter darstellt.*

Allerdings dürfte das Normalformenproblem alles andere als einfach sein, und ein Weg zu seiner Lösung ist vorerst nicht zu sehen. Aber man kann wohl kaum bestreiten, daß seine Formulierung äußerst naheliegt, sobald man gezwungen wird, systematisch mit nichttrivialen Ultrafiltern zu arbeiten.

§ 3. Die Gruppen $\tilde{F}_P$ und ihr Konjunktionsproblem

Es sei M eine beliebige Argumentmenge. F sei eine auf M definierte Funktionenmenge im Sinne von § 1. Um gewisse Beschränkungen, die wir F gelegentlich auferlegen müssen, bequem formulieren zu können, setzen wir fest: Ist N irgendeine Untermenge von M, so bedeute $H(\mathsf{N})$ die Menge aller der $f \in F$, für die $f(\mu) = 0$ $(\mu \in \mathsf{M} - \mathsf{N})$. Ferner werde für jedes $f \in F$ durch $\tilde{f}(\mu) = f(\mu)$ $(\mu \in \mathsf{N})$ eine Funktion $\tilde{f}$ auf der Argumentmenge N erklärt. Die

[7]) Es seien nämlich $\mathfrak{U}_{\Psi_i}(\Phi)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ abzählbar viele Umgebungen von Φ. Dann ist der kleinste gemeinschaftliche Oberfilter Ψ aller Ψ_i ebenso wie die Ψ_i selbst abzählbar und $\mathfrak{U}_\Psi(\Phi) = \cap_i \mathfrak{U}_{\Psi_i}(\Phi)$. Da Ψ eine Basis $A_1 > A_2 > \cdots$ besitzt, wobei alle A_i unendlich wegen $\Psi < \Phi$, kann man [wie leicht zu sehen auch für $\cap_i A_i \neq \emptyset$] nach der Methode von [5]) zwei Ψ umfassende abzählbare Filter Ψ', Ψ'' konstruieren, derart daß $\Psi' < \Phi$, $\Psi'' \not< \Phi$. Dann aber liegt jeder Ultrafilter $\Phi'' > \Psi''$ zwar in $\mathfrak{U}_\Psi(\Phi)$ aber nicht in $\mathfrak{U}_{\Psi''}(\Phi)$, es ist also $\mathfrak{U}_{\Psi''}(\Phi)$ echte Untermenge von $\mathfrak{U}_\Psi(\Phi)$.

Zuordnung $f \to \tilde{f}$ definiert dann einen kanonischen Homomorphismus von F auf eine gewisse Funktionengruppe $\tilde{F}_{M-N}$ mit der Argumentmenge N, die als die *Restriktion von F auf* N bezeichnet werden soll. Bei dem Homomorphismus $F \to \tilde{F}_{M-N}$ wird $H(\mathsf{N})$ im allgemeinen nur *in* $\tilde{F}_{M\ N}$ abgebildet; wir wollen nun F *r-zerlegbar* (restriktionszerlegbar) nennen, wenn für jedes N stets $F \to \tilde{F}_{M-N}$ die Gruppe $H(\mathsf{N})$ *auf* $\tilde{F}_{M\ N}$ abbildet. Offenbar gilt: F ist dann und nur dann r-zerlegbar, wenn F für jede Untermenge N von M gleichzeitig mit einer beliebigen Funktion f stets auch die durch $f_{\mathsf{N}}(\mu) = f(\mu)$ $(\mu \in \mathsf{N})$, $f_{\mathsf{N}}(\mu) = 0$ $(\mu \in \mathsf{M} - \mathsf{N})$ erklärte Funktion f_{N} enthält. — Daraus folgt weiter: Ist $\mathsf{M} = \mathsf{M}_1 \cup \mathsf{M}_2$, $\mathsf{M}_1 \cap \mathsf{M}_2 = 0$, so läßt sich die r-zerlegbare Gruppe F stets in kanonischer Weise isomorph auf die direkte Summe $\tilde{F}_{\mathsf{M}_1} \oplus \tilde{F}_{\mathsf{M}_2}$ abbilden. Die Zerlegung von M in zwei paarweise elementefremde Mengen $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2$ liefert also mit Hilfe des Restriktionsprozesses eine direkte Zerlegung von F, — daher die Bezeichnung r-zerlegbar. — Als *endlich überdeckend* möge F bezeichnet werden, wenn sich in F endlich viele Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ so bestimmen lassen, daß die Mengen $\Lambda^-(f_i)$ ganz M überdecken, $\mathsf{M} = \Lambda^-(f_1) \cup \cdots \cup \Lambda^-(f_n)$. Man beachte, daß die für uns besonders wichtigen Gruppen G und R (vgl. § 1) sowohl r-zerlegbar als auch endlich überdeckend sind.

Ist Ψ, P ein zusammengehöriges Filter-Antifilter-Paar aus B im Sinne von § 2, so bedeutet $F(\mathsf{P})$ bzw. O_Ψ die Gruppe aller $f \in F$ mit $\Lambda(f \neq 0) \in P$, $\Lambda(f = 0) \in \Psi$ bzw. die Halbgruppe aller $f \in F$ mit $\Lambda^-(f) \in \mathsf{P}$, $\Lambda(f) \in \Psi$ [8]). Ferner werde $\tilde{F}_{\mathsf{P}} = F/F(\mathsf{P})$ gesetzt. — Offenbar ist stets $F(\mathsf{P})$ die größte in $\tilde{O}_\Psi$ enthaltene Gruppe. Ist also $F(\mathsf{P}) \neq F$, so besteht $F(\mathsf{P})$ gerade aus allen und nur den Funktionen, die hinsichtlich der durch O_Ψ festgelegten Ordnung $\mathfrak{O}_\Psi$ dem Nullelement ordnungsgleich sind [9]). Was die Frage nach einer eventuellen Gleichung $F(\mathsf{P}) = F$ angeht, so überlegt man sich leicht:

Satz 5. *Es ist dann und nur dann $F(\mathsf{P})$ echte Untergruppe von F für alle* P, *wenn F endlich überdeckend ist.*

Wird nämlich $\mathsf{M} = \Lambda^-(f_1) \cup \cdots \cup \Lambda^-(f_n)$ für passende f_i, so enthält kein P alle $\Lambda^-(f_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, und es muß daher für jedes P mindestens ein f_i in $\tilde{F}_{\mathsf{P}}$ eine Restklasse $\tilde{f}_i \neq \tilde{o}$ erzeugen. — Ist andererseits F nicht endlich überdeckend, so bilden die sämtlichen Vereinigungsmengen $\Lambda(f_1) \cup \cdots \cup \Lambda^-(f_n)$ $(f_i \in F;\ n = 1, 2, \ldots)$ zusammen mit ihren Untermengen einen Antifilter P^*, und es wird $F = F(\mathsf{P}^*)$, weil P^* wegen $\Lambda(f \neq 0) = \Lambda^-(f) \cup \Lambda^-(-f)$ für jedes $f \in F$ die Menge $\Lambda(f \neq 0)$ enthält.

Sind Ψ und P trivial, besteht also Ψ aus einer Menge N und ihren Obermengen, P aus $\mathsf{M} - \mathsf{N}$ und den Untermengen von $\mathsf{M} - \mathsf{N}$, so sieht man sofort:

[8]) Daß wir $F(\mathsf{P})$ mit Hilfe des Antifilters P und O_Ψ mit Hilfe des komplementären Filters Ψ charakterisieren, könnte inkonsequent scheinen. Indessen beachte man: a) Bei einer Funktion f aus einer Untergruppe von F interessiert naturgemäß $\Lambda(f \neq 0)$ mehr als $\Lambda(f = 0)$. $\Lambda(f \neq 0)$ aber liegt bei $F(\mathsf{P})$ in P. — b) Bei einer hinsichtlich einer bestimmten Ordnung positiven Funktion f fragt man automatisch zuerst: Wo ist f *positiv* (bzw. nicht negativ)? Bei der zu O_Ψ gehörigen Ordnung $\mathfrak{O}_\Psi$ sind aber die positiven Funktionen f durch $\Lambda(f) \in \Psi$ und *nicht* durch $\Lambda(f) \in \mathsf{P}$ gekennzeichnet.

[9]) Zur Definition der Ordnungsgleichheit vgl. § 1.

$F(P)$ umfaßt alle und nur die Funktionen, die überall auf N verschwinden. $\widetilde{F}_{\mathsf{P}}$ kann mit der oben mit $\widetilde{F}_{\mathsf{M}-\mathsf{N}}$ bezeichneten Restriktionsgruppe von F auf N identifiziert werden. $\widetilde{O}_\Psi = O_\Psi/F(\mathsf{P})$ ist diejenige Halbgruppe, die im Sinne von § 1 die natürliche Ordnung der Funktionengruppe $\widetilde{F}_{\mathsf{P}} = \widetilde{F}_{\mathsf{M}-\mathsf{N}}$ festlegt. — Diese Bemerkung zeigt einerseits, daß sich die Bildung der Restriktionsgruppen als ein Spezialfall der Bildung von Restklassengruppen mit Hilfe von Antifiltern P auffassen läßt. Andererseits läßt sie es als berechtigt erscheinen, wenn wir grundsätzlich in einer beliebigen Gruppe $\widetilde{F}_{\mathsf{P}}$ die *natürliche Ordnung* $\widetilde{\mathfrak{O}}_\Psi$ mit Hilfe der Halbgruppe $\widetilde{O}_\Psi = O_\Psi/F(\mathsf{P})$ definieren. Ziehen wir es vor, statt von Restklassenbildung von der Einführung eines neuen Gleichheitsbegriffes zu reden, so kommt offenbar der Übergang von F und $\mathfrak{O}$ zu $\widetilde{F}_{\mathsf{P}}$ und $\widetilde{\mathfrak{O}}_\Psi$ auf die folgende Festsetzung hinaus: Zwei Funktionen f und g sollen dann und nur dann als gleich angesehen werden, wenn sie sich höchstens auf einer zu P gehörigen Menge unterscheiden. Die Funktion f soll als positiv gelten, wenn sie auf mindestens einer zu Ψ gehörigen Menge positiv ist. — Die Untersuchung der Ordnungen $\widetilde{\mathfrak{O}}_\Psi$ der Gruppen $\widetilde{F}_{\mathsf{P}}$ ist das Hauptziel dieses Paragraphen, wobei uns in erster Linie die nichttrivialen Antifilter interessieren, die den Antifilter E aller endlichen Untermengen von M enthalten. Zunächst arbeiten wir dabei in F selbst.

Satz 6. a) *Ist $\Psi = \Phi$ ein Ultrafilter, also $\mathsf{P} = \Pi$ ein Antiultrafilter, so ist O_Φ, falls $F(\Pi) \neq F$, stets eine T-Halbgruppe.* b) *Ist F r-zerlegbar und endlich überdeckend, so ist stets $F(\Pi) \neq F$ und O_Ψ niemals eine T-Halbgruppe, falls Ψ kein Ultrafilter.* c) *Für jeden Filter Ψ ist O_Ψ gleich dem Durchschnitt aller T-Halbgruppen $O_\Phi = T_\Phi$, deren definierende Ultrafilter Φ den Filter Ψ umfassen.*

Beweis. a) Wegen $A(f) \cup A^-(f) = \mathsf{M}$ liegt für jedes $f \in F$ entweder $A(f)$ oder $A^-(f)$ in Φ; wegen $A(f) \supseteq A^-(-f)$ muß daher immer mindestens eine der beiden Funktionen f, $-f$ zu O_Φ gehören. b) Wegen $F(\Pi) \neq F$ vgl. Satz 5. Ist Ψ kein Ultrafilter, so gibt es zwei Mengen A_1, A_2 mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cup A_2 = \mathsf{M}$, $A_i \notin \Psi$ $(i = 1, 2)$. Unter den Voraussetzungen von b) gilt dann, wie leicht zu sehen: Es gibt Funktionen $f_1, \ldots, f_l$; $g_1, \ldots, g_m$ in F, derart daß $A_1 = A^-(f_1) \cup \cdots \cup A^-(f_l)$; $A_2 = A^-(g_1) \cup \cdots \cup A^-(g_m)$; $f_i(\mu) = 0$ $(\mu \in A_2)$, $g_k(\mu) = 0$ $(\mu \in A_1)$. Setzt man nun $f = f_1 + \cdots + f_l - g_1 - \cdots - g_m$, so kann weder f noch $-f$ zu O_Ψ gehören. — c) Es sei $f \notin O_\Psi$, also $A(f) \notin \Psi$. Dann ist der triviale, aus $A(f)$ und allen Untermengen $A(f)$ bestehende Antifilter P' zu Ψ elementefremd und nach Satz 1 existiert ein Ψ umfassender, zu P' elementefremder Ultrafilter Φ. O_Φ enthält f nicht wegen $A(f) \notin \Phi$. Andererseits folgt aus $f \in O_\Psi$, $A(f) \in \Psi$ sofort $A(f) \in \Phi$, $f \in O_\Phi$ für jeden Ψ umfassenden Ultrafilter Φ.

Umfaßt der zu Π komplementäre Ultrafilter Φ den zu P komplementären Filter Ψ, so enthält $O_\Phi = T_\Phi$ die Gruppe $F(\mathsf{P})$. Es wird daher $\widetilde{T}_{\Phi\Psi} = T_\Phi/F(\mathsf{P})$ eine $\widetilde{O}_\Psi$ umfassende T-Halbgruppe aus $\widetilde{F} = F/F(\mathsf{P})$ und aus Satz 6c) ergibt sich:

Korollar zu Satz 6. *Für jeden Filter Ψ wird $\widetilde{O}_\Psi$ gleich dem Durchschnitt aller T-Halbgruppen $\widetilde{T}_{\Phi\Psi}$, die mit Hilfe der Ψ enthaltenden Ultrafilter Φ gebildet werden können.*

Dann ist das Konjunktionsproblem für natürliche Ordnungen aller Gruppen $\widetilde{F}_{\mathsf{P}}$ gelöst. Das Korollar gilt natürlich auch für O selbst, denn es ist ja $O = \widetilde{O}_{\Psi_\infty}$, falls wir unter Ψ_∞ den nur aus M bestehenden Filter verstehen. Aber in diesem Falle wäre der Weg über Satz 6 bei der Behandlung des Konjunktionsproblems ein völlig überflüssiger Umweg. Denn es wird offenbar schon $O = \bigcap_\mu T_{\Phi_\mu}$, falls wir unter Φ_μ die trivialen, den einzelnen Elementen von M im Sinne von § 2 zugeordneten Ultrafilter verstehen. Um einzusehen, daß bei der Zulassung beliebiger Gruppen $\widetilde{O}_\Psi$ auf die nichttrivialen Ultrafilter nicht verzichtet werden kann, überlegen wir:

Ist F r-zerlegbar, so definiert kein Ψ nicht umfassender Ultrafilter Φ in $\widetilde{F}_{\mathsf{P}}$ eine $\widetilde{O}_\Psi$ enthaltende T-Halbgruppe, weil unter unserer Voraussetzung stets $T_\Phi + F(\mathsf{P}) = F$ wird. Da nämlich T_Φ die Gruppe $F(\Pi)$ enthält, genügt es $F(\Pi) + F(\mathsf{P}) = F$ zu beweisen. Ist aber A eine nicht zu Φ gehörige Menge aus Ψ, so gehört $\mathsf{M} - A$ zwar zu dem zu Ψ komplementären Antifilter P, aber nicht zu dem zu Φ komplementären Antiultrafilter Π, und es muß A wegen $(\mathsf{M} - A) \cap A = 0$ in Π liegen. Definieren wir weiter zu einem beliebigen $f \in F$ die Funktion f_i $(i = 1, 2)$ durch $f_1(\mu) = f(\mu)$ $(\mu \in A)$, $f_1(\mu) = 0$ $(\mu \notin A)$, $f_2(\mu) = 0$ $(\mu \in A)$, $f_2(\mu) = f(\mu)$ $(\mu \notin A)$, so sind f_1 und f_2 Elemente von F, weil F r-zerlegbar. Außerdem haben wir: $f_1 \in F(\Pi)$, $f_2 \in F(\mathsf{P})$, $f = f_1 + f_2 \in F(\Pi) + F(\mathsf{P})$. Unser Resultat zeigt uns insbesondere: Bei einer r-zerlegbaren Gruppe F (z.B. bei $F = G$ oder $F = R$) sind die trivialen Ultrafilter nicht mehr zur Bildung von T-Halbgruppen benützbar, sobald solche Gruppen $F(\mathsf{P})$ und $\widetilde{F}_{\mathsf{P}}$ betrachtet werden sollen, bei denen P den Antifilter E aller endlichen Untermengen von M enthält.

Das einfachste Beispiel einer Gruppe, bei deren Untersuchung wir ausschließlich auf die nichttrivialen Ultrafilter angewiesen sind, liefert also $\widetilde{G}_{\mathsf{E}}$. Wir zeigen kurz, warum es (abgesehen von den bereits in der Einleitung angegebenen Gründen) lohnend erscheint, sich gerade mit $\widetilde{G}_{\mathsf{E}}$, und zwar speziell für den Fall einer abzählbaren Argumentmenge $\mathsf{M}_0 = \{1, 2, \ldots\}$ näher zu beschäftigen. Die Gruppe G ist offenbar eines der einfachsten Beispiele, auf das man stößt, wenn man nach Abelschen Gruppen fragt, die kein abzählbares Erzeugendensystem besitzen. Trotzdem hat schon G selbst überraschende Eigenschaften. Wohl läßt sich G als „unendliche" direkte Summe (TYCHONOFF-Summe) von abzählbar unendlich vielen zyklischen Summanden $\mathfrak{Z}_\nu = \{g_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ darstellen. [Als Basis für $\mathfrak{Z}_\nu$ hat man einfach die durch $g_\nu(\mu) = \delta_{\nu\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ definierte Funktion zu wählen.] Aber es zeigt sich, daß G keine direkte Zerlegung in zyklische Summanden in der gebräuchlichen Bedeutung des Wortes besitzt, also keine Zerlegung, bei der jedes $f \in G$ schon in der Summe von *endlich vielen* Summanden enthalten ist, — vgl. hierzu § 7. Geht man weiter zu $\widetilde{G}_{\mathsf{E}}$ über, so sieht man überhaupt nicht mehr, wie eine Aufspaltung von $\widetilde{G}_{\mathsf{E}}$ bewerkstelligt werden könnte, sei es im Sinne einer Summenzerlegung, sei es im Sinne einer Durchschnittsdarstellung. Unsere Ordnungsbetrachtungen liefern nun einen ersten Hinweis, wie sich dieses Problem

vielleicht anpacken ließe. Denn die zyklischen Gruppen (unendlich hoher Ordnung) können als die einfachsten, gleichzeitig total und streng geordneten Abelschen Gruppen angesehen werden und die Gruppen $\widetilde{G}_{\Pi\mathfrak{E}} = G(\Pi)/G(\mathfrak{E})$, die man mit Hilfe der $\mathfrak{E}$ umfassenden und damit nichttrivialen Antiultrafilter Φ gewinnt, sind ausgezeichnete Untergruppen von $\widetilde{G}_{\mathfrak{E}}$ mit der Eigenschaft, daß stets die Restklassengruppen $\widetilde{G}_{\mathfrak{E}}/\widetilde{G}_{\Pi\mathfrak{E}}$ sich streng und total ordnen lassen, und zwar in einer ganz bestimmten Weise, die durch die Definition von G zum mindesten nahegelegt wird. Natürlich liefert die Einführung der $\widetilde{G}_{\Pi\mathfrak{E}}$ für die systematische Behandlung des Strukturproblems von $\widetilde{G}_{\mathfrak{E}}$ wirklich nicht mehr als eine Anregung; vor allem müßte vom Standpunkt einer am Vorbild der abzählbar erzeugbaren Abelschen Gruppen orientierten Strukturtheorie die Auszeichnung der „natürlichen" Ordnung von $\widetilde{G}_{\mathfrak{E}}$ viel sorgfältiger gerechtfertigt werden, als es hier im Text nötig war, wo der Ordnungsbegriff von vornherein im Mittelpunkt stand. Aber unsere Überlegungen dürften es jedenfalls verständlich machen, wenn wir uns im folgenden Paragraphen mit der Struktur der totalen Ordnungen, die den Ultrafiltern Φ entsprechen, etwas genauer beschäftigen.

§ 4. Struktur der Ultrafilter-Ordnungen

Ist in der (zunächst völlig willkürlichen) Gruppe F eine T-Halbgruppe und damit eine totale Ordnung $\mathfrak{T}$ ausgezeichnet, so sollen zwei Elemente f, g als *gleich* bezeichnet werden, wenn sie relativ $\mathfrak{T}$ ordnungsgleich sind, wenn also $f-g$ in der größten Untergruppe H_T von T liegt (vgl. § 1). „Streng gleich" dagegen soll Gleichheit in F bedeuten. Abgekürzt sei $f=g$ die Bezeichnung für strenge Gleichheit, $f\equiv g$ die für Ordnungsgleichheit. Aus $f>g$, $g>f$ folgt also stets $f\equiv g$. Solange nichts anderes bemerkt, seien $f(g, \ldots)$ immer echt positive Elemente im Sinne von § 1. Die Elemente f, g heißen *vergleichbar*, wenn $n\cdot f>g$, $m\cdot g>f$ für passendes m, n[10]). Ist andererseits etwa $f>n\cdot g$ für alle n, so heißt f *groß* gegenüber g, g *klein* gegenüber f, und wir schreiben $f\gg g$. Sind f und g vergleichbar, und ist etwa $f>g$, so nennen wir f und g *fast gleich*, wenn $f\gg f-g$ (und damit, wie leicht zu sehen, auch $g\gg f-g$). Sind f und g vergleichbar, so erhält man einen DEDEKINDschen Schnitt im Bereich der rationalen Zahlen, wenn man den Bruch $m\cdot n^{-1}$ der „Unterklasse" oder „Oberklasse" zuordnet, je nachdem ob $n\cdot f>m\cdot g$ oder $n\cdot f\leq m\cdot g$. Ist ϱ die durch diesen Schnitt bestimmte reelle Zahl, so kann man unbedenklich g fast gleich zu $\varrho\cdot f$ bzw. f fast gleich zu $\varrho^{-1}\cdot g$ nennen,

[10]) Die im folgenden bei den total geordneten Gruppen benützte Terminologie entspricht der des 5. Buches der euklidischen „Elemente". Euklid beschränkt sich allerdings durch die Forderung der Vergleichbarkeit aller (echt positiven) Elemente auf den „archimedischen" Fall. Er braucht daher weder das Symbol $f\gg g$ noch die Definition für „fast gleich" des Textes. Typisch euklidisch aber scheint mir im Text der Gedanke, soweit wie möglich allein mit dem Grundbegriff der Vergleichbarkeit auszukommen und die Einführung neuer spezieller Hilfsbegriffe aus der Gruppentheorie zu vermeiden. Es ist bemerkenswert, daß man auf diesem klassischen, in vieler Hinsicht bequemsten Wege recht weit kommt.

auch wenn von vornherein nur $n \cdot f$, aber nicht $\varrho \cdot f$ in F definiert ist. — Wie üblich soll die Ordnung $\mathfrak{O}$ archimedisch bzw. diskret heißen, wenn alle $f \in F$ vergleichbar sind, bzw. wenn in T jedes f einem Vielfachen $n \cdot f_1$ eines kleinsten Elements f_1 gleich ist; es bedeutet also „archimedisch" bzw. „diskret" die additive Isomorphie von F/H_T zu einer geordneten Untergruppe aller reellen Zahlen bzw. zur Gruppe aller ganzen Zahlen.

Es sei jetzt speziell $F = G$ und T eine zu einem Ultrafilter Φ mit dem komplementären Antiultrafilter $\Pi = \mathsf{M} - \Phi$ gehörige T-Halbgruppe. Dann gilt zunächst: *Jedes $f \in T$ ist einem $f^* \in O$ gleich.* Wegen $f \in T$ ist nämlich sicher $\Lambda^-(f) \in \Pi$ und damit $\Lambda(f) \in \Phi$. Das aber zeigt, daß f z.B. der in O liegenden, durch $f^*(\mu) = f(\mu)$ $(\mu \in \Lambda(f))$, $f^*(\mu) = 0$ $(\mu \in \Lambda^-(f))$ definierten Funktion f^* gleich ist. — Wir dürfen und wollen unter diesen Umständen die betrachteten Funktionen $f, g, \ldots$ stillschweigend stets in O annehmen. Unter f_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ verstehen wir die durch „$f_n(\mu) = n$ für alle μ" definierte Funktion. — Ist f eine beliebige, echt positive Funktion aus G, so ist jedenfalls $\Lambda^-(f)$ leer und $\Lambda(f = 0) \in \Pi$. Betrachten wir weiter für $n = 1, 2, \ldots$ die Mengen $\Lambda(f \leqq n)$, $\Lambda(f > n)$, so ist für jedes einzelne n immer entweder $\Lambda(f \leqq n) \Phi$, $\Lambda(f > n) \in \Pi$ oder $\Lambda(f \leqq n) \in \Pi$, $\Lambda(f > n) \in \Phi$, und wir haben die *Alternative:*

α) Es ist $\Lambda(f \leqq n_0) \in \Phi$ für ein n_0. Dann ist auch [wegen $\Lambda(f \leqq n_0) = \Lambda(f = 0) \cup \Lambda(f = 1) \cup \cdots \cup \Lambda(f = n_0)$ und $\Lambda(f = 0) \in \Pi$] sicher $\Lambda(f = n) \in \Phi$ für mindestens ein $n \leqq n_0$. — β) Es ist $\Lambda(f > n) \in \Phi$ für alle n.

Mit Hilfe der Alternative beweisen wir nun leicht:

Satz 7. a) *In T ist f_1 ein kleinstes Element und jedes zu f_1 vergleichbare Element ist einem f_n gleich.* — b) *Ist $f \gg f_1$, so gibt es für jedes positiv reelle ϱ ein zu $\varrho \cdot f$ fast gleiches g.*

a α) Gilt für f der Fall α) der Alternative, ist also etwa $\Lambda(f = n) \in \Phi$, so ist f zu f_n gleich, weil $\Lambda(f \neq f_n) \subseteq \Lambda(f \neq n) \in \Pi$.

a β) Gilt für f der Fall β) der Alternative, so ist $f - f_n$ echt positiv für jedes n, da $\Lambda(f - f_n > 0) \supseteq \Lambda(f > n) \in \Phi$. Es ist also hier $f \gg f_1$ wegen $f_n = n \cdot f_1$. — Aus a α) und a β) zusammen folgt sofort die volle Behauptung a) von Satz 4. — b) Es sei $f \gg f_1$ [Fall β) der Alternative]. Dann ist wegen $\emptyset \notin \Phi$ jedenfalls $\Lambda(f = n) \neq \emptyset$ für unendlich viele n. — Wir bezeichnen jetzt für $n = 1, 2, \ldots$ mit $m(n)$ jeweils die kleinste ganze Zahl, derart daß $m(n) \cdot n^{-1} > \varrho$, definieren g durch: $g(\mu) = 0$ $(\mu \in \Lambda(f = 0))$, $g(\mu) = m(n)$ $(\mu \in \Lambda(f = n);\ n = 1, 2, \ldots)$ und behaupten: Es ist g fast gleich zu $\varrho \cdot f$. Zum Beweis beachte man: Es ist $\lim_{n \to \infty} (m(n) \cdot n^{-1} - \varrho) = 0$. Daraus folgt: Ist $m_0 \cdot n^{-1} < \varrho$ (bzw. $> \varrho$), so wird $m_0 \cdot n - n_0 \cdot m(n) < 0$ (> 0) für alle hinreichend großen n. Dann aber haben wir für solche n: $m_0 \cdot f(\mu) - n_0 \cdot g(\mu) < 0$ (bzw. > 0) auf $\overline{\mathsf{N}}_n$ und wegen $\overline{\mathsf{N}}_n \in \Phi$ bedeutet das: $m_0 \cdot f < n_0 \cdot g$ $(m_0 \cdot f > n_0 \cdot g)$.

Wir interessieren uns jetzt weiter für die verschiedenen Größenklassen in T, genauer gesagt für die folgende Frage: Kann man in einfacher Weise eine Elementmenge f_σ aus T angeben, derart daß jedes f mit einem und nur einem f_σ vergleichbar ist?

Satz 8. *Die Ordnung* $\mathfrak{T}$ *von* G *ist dann und nur dann diskret, wenn es in* Φ *keine Folge* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ *mit* $\bigcap_n A_n = \emptyset$ *gibt. — Ist* $\mathfrak{T}$ *nicht diskret, so gibt es zu jedem* $f \in T$ *ein* $g \gg f$.

Beweis. a) Aus Satz 7 folgt sofort: Ist $\mathfrak{T}$ nicht diskret, so muß ein $f \gg f_1$ existieren. Bei f gehört ferner $A_n = A$ $(f > n)$, wie bereits gezeigt, stets zu Φ und wir haben: $A_n \supseteq A_{n+1}$, $\bigcap_n A_n = \emptyset$. Die Bedingung von Satz 8 ist also für die Diskretheit von $\mathfrak{T}$ hinreichend. b) Es sei jetzt eine Folge $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ mit $\bigcap_n A_n = \emptyset$ in Φ vorhanden, und es sei f beliebig aus T. Dann ist wegen $f \not\equiv 0$ auch $A(f \geqq 1) \in \Phi$, $\mathsf{N}_n = A_n \cap A(f \geqq 1) \in \Phi$, und wir haben $\mathsf{N}_n \supseteq \mathsf{N}_{n+1}$, $\bigcap_n \mathsf{N}_n = \Phi$. Definieren wir nun g durch $g(\mu) = 1$ $(\mu \in \mathsf{M} - \mathsf{N}_1)$, $g(\mu) = (n+1) \cdot f(\mu)$ $(\mu \in \mathsf{N}_n - \mathsf{N}_{n+1};\ n = 1, 2, \ldots)$, so ist damit g auf ganz M erklärt, da $\mathsf{N}_1 = (\mathsf{N}_1 - \mathsf{N}_2) \cup (\mathsf{N}_2 - \mathsf{N}_3) \cup \cdots$ wegen $\bigcap_n \mathsf{N}_n = \emptyset$. Ferner wird für $n = 1, 2, \ldots$ stets $n \cdot f - g$ negativ auf N_n und wegen $\mathsf{N}_n \in \Phi$ bedeutet das $n \cdot f - g \notin T$ $(n = 1, 2, \ldots)$; $g \gg f$. — Fragen wir nun nach Kriterien für die Gültigkeit der Diskretheitsbedingung von Satz 8, so ergibt sich:

Satz 9. *Die Ordnung* $\mathfrak{T}$ *ist sicher nicht diskret, wenn* Φ *eine abzählbare Menge* A *enthält, also insbesondere dann, wenn* M *selbst abzählbar.*

Ist nämlich A eine abzählbare, zu Φ gehörige Menge, so muß Φ als *nichttrivialer* Ultrafilter zu jeder endlichen Untermenge E von A das Komplement $\bar{\mathsf{E}} = A - \mathsf{E}$ enthalten und wegen der Abzählbarkeit von A kann man aus solchen Komplementen eine Folge $\bar{\mathsf{E}}_1 \supset \bar{\mathsf{E}}_2 \supset \cdots$ mit $\bigcap_n \bar{\mathsf{E}}_n = \emptyset$ bilden. — Ist M überabzählbar, so existieren sicher nichttriviale Ultrafilter Φ, in denen keine abzählbare Menge A auftritt (vgl. § 2). — Bei *überabzählbarem* M sind also zwei wesentlich verschiedene Klassen von nichttrivialen Ultrafiltern zu unterscheiden: a) *Ultrafilter mit abzählbaren Mengen*, b) *Ultrafilter ohne abzählbare Mengen*. Beim Typ a) weiß man, daß die zugehörige Ordnung $\mathfrak{T}$ von G nicht diskret wird. Beim Typ b) reichen unsere bisherigen Überlegungen nicht zur Bestimmung des Typus von $\mathfrak{T}$ aus, denn es ist hier ohne weiteres nicht zu sehen, wie man das Auftreten einer Folge $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ mit $\bigcap_n A_n = \emptyset$ in *jedem* Φ beweisen könnte. Nur das eine läßt sich leicht zeigen, daß auch beim Typ b) unter Umständen Ultrafilter Φ existieren, die derartige Folgen enthalten. Es sei nämlich z.B. M die Menge aller reellen, echt positiven Zahlen, A_n die Untermenge aller Zahlen $\mu \leqq 10^{-n}$. Dann ist $A_n \supset A_{n+1}$, $\bigcap_n A_n = \emptyset$. Aus der Tatsache, daß alle A_n überabzählbar sind, folgt weiter, daß es einen Filter Ψ gibt, der sowohl die A_n als auch sämtliche Untermengen von M mit abzählbarem Komplement enthält. Ein Ψ umfassender Ultrafilter Φ ist dann ein Filter der von uns gewünschten Art. Das Endergebnis unserer Betrachtungen läßt sich so formulieren:

Es ist noch nicht entschieden, ob es nicht triviale Ultrafilter mit zugeordneten diskreten Ordnungen $\mathfrak{T}$ gibt oder nicht. Jedenfalls kann $\mathfrak{T}$ nur dann diskret werden, wenn für Φ mindestens zwei Überabzählbarkeitsvoraussetzungen [Überabzählbarkeit von M und Vorliegen des Typus b)] erfüllt sind. Die Nichtdiskretheit von $\mathfrak{T}$ bei nichttrivialem Φ darf also mit gewissem Recht als Regelfall angesehen werden. — Für diesen Regelfall beweisen wir über Satz 7 und Satz 8 hinaus:

Satz 10. a) *Ist $\mathfrak{T}$ nichtdiskret, so gibt es in T zu abzählbar unendlich vielen $f^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots)$ stets ein f, das groß ist gegenüber allen $f^{(i)}$.* b) *Ist ferner ein $g \gg f^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots)$ von vornherein gegeben, so kann f so bestimmt werden, daß $g \gg f$.* c) *Existiert andererseits ein $\bar{g}$ mit $f^{(i)} \gg \bar{g}$ $(i=1, 2, \ldots)$, so gibt es auch ein $\bar{f}$ mit $f^{(i)} \gg \bar{f}$ $(i=1, 2, \ldots)$, $\bar{f} \gg \bar{g}$.*

Wegen der Nichtdiskretheit von $\mathfrak{T}$ gibt es in Φ eine Folge $A_1 > A_2 > \cdots$ mit $\bigcap_n A_n = 0$ und wir dürfen annehmen, daß $f^{(1)}(\mu) \geq 1$, $\bar{g}(\mu) \geq 1$ auf A_1 [vgl. Beweis b) zu Satz 8]. Im Falle a) setzt man nun einfach: $f(\mu) = 1$ $(\mu \in \mathsf{M} - A_1)$, $f(\mu) = (n+1) \cdot \max\left(f^{(1)}(\mu), \ldots, f^{(n)}(\mu)\right)$ $(\mu \in A_n - A_{n+1})$. Dann ist f überall auf M definiert, und die bei Satz 8 unter b) angestellten Überlegungen zeigen, daß $f \gg f^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots)$. Etwas umständlicher wird der Beweis von b). Wir haben $A\left(g \geq (n+1)^2 \cdot \max\left(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}\right)\right) = A\left(g \geq (n+1)^2 \cdot f^{(1)}\right) \cap A\left(g \geq (n+1)^2 \cdot f^{(2)}\right) \cap \cdots A\left(g \geq (n+1)^2 \cdot f^{(n)}\right) \in \Phi$ wegen $g \gg f^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots)$. Bilden wir daher $\mathsf{N}_n = A_n \cap A\left(g \geq (n+1)^2 \cdot \max\left(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}\right)\right)$, so haben wir $\mathsf{N}_n \in \Phi$, $\mathsf{N}_n \geq \mathsf{N}_{n+1}$, $\bigcap_n \mathsf{N}_n = 0$. Es wird also f durch $f(\mu) = 1$ $(\mu \in \mathsf{M} - \mathsf{N}_1)$, $f(\mu) = (n+1) \cdot \max\left(f^{(1)}(\mu), \ldots, f^{(n)}(\mu)\right)$ $(\mu \in \mathsf{N}_n - \mathsf{N}_{n+1})$ auf ganz M definiert, und man sieht wie im Falle a) ohne Schwierigkeit, daß nicht nur $f \gg f^{(i)}$ sondern auch $g \gg f$. — Bei c) arbeitet man statt mit den N_n mit den durch $\bar{\mathsf{N}}_n = A_n \cap A\left(\bar{g} \leq (n+1)^{-1} \cdot \min\left(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}\right)\right)$ definierten Mengen $\bar{\mathsf{N}}_n$ und setzt $f(\mu) = 1$ $(\mu \in \mathsf{M} - \bar{\mathsf{N}}_1)$, $f(\mu) = (n+1) \cdot \bar{g}(\mu)$ $(\mu \in \bar{\mathsf{N}}_n - \bar{\mathsf{N}}_{n+1})$. Im übrigen schließt man ganz analog wie unter b). — Um die Bedeutung von Satz 10 zu würdigen, fassen wir die Elemente f aus T in (paarweise elementefremde) Klassen vergleichbarer Elemente zusammen und ordnen die Menge K aller Klassen $\mathfrak{k}$ in naturgegebener Weise streng und total auf Grund der totalen Ordnung $\mathfrak{T}$ von G[11]). In der total geordneten Menge K definieren wir die natürliche Topologie, indem wir als offene Mengen in K die „Intervalle" $\mathfrak{k}_1 \gg \mathfrak{k} \gg \mathfrak{k}_2$ einführen. Für K und seine Topologie ergibt sich dann aus unseren Sätzen:

K enthält eine kleinste Klasse, aber keine größte. In jeder offenen Menge von K liegen überabzählbar viele Klassen. K kann nicht von abzählbar vielen offenen Mengen überdeckt werden. Keiner Klasse $\mathfrak{k}$ kann ein System von abzählbar vielen, $\mathfrak{k}$ enthaltenden offenen Mengen $\Omega_1 > \Omega_2 > \cdots$ so zugeordnet werden, daß kein $\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}$ (oder auch nur kein $\mathfrak{k}_1 \gg \mathfrak{k}$ bzw. kein $\mathfrak{k}_1$ mit $\mathfrak{k} \gg \mathfrak{k}_1$) allen Ω_i angehört. — Kurz gesagt: Für K als topologischem Raum gelten keinerlei Abzählbarkeitsaxiome.

Zum Beweis hat man nur in Satz 10 die Elemente $f^{(i)}$ so zu wählen, daß $f^{(i+1)} \gg f^{(i)}$ bzw. $f^{(i)} \gg f^{(i+1)}$. Natürlich liegt es jetzt nahe, weiter zu fragen, ob

[11]) Es wird also die Klasse $\mathfrak{k}_1$ als größer angesehen als die Klasse $\mathfrak{k}_2$, wenn ein und damit jedes Element aus $\mathfrak{k}_1$ groß ist gegenüber einem und damit jedem Element aus $\mathfrak{k}_2$. Will man den Zusammenhang herstellen zwischen den Klassen des Textes und den isolierten Untergruppen der geordneten Gruppe F im Sinne von Krull [1] § 2 und vor allem § 4, so hat man zu beachten: Jeder Klasse $\mathfrak{k}$ entspricht eine bestimmte isolierte Untergruppe $I(\mathfrak{k})$. Dabei enthält $I(\mathfrak{k})$ an positiven Elementen alle und nur die f, die gegenüber den g aus $\mathfrak{k}$ *nicht* groß sind. Bildet man die Vereinigung oder den Durchschnitt einer beliebigen Menge von isolierten Untergruppen $I(\mathfrak{k}_\tau)$, so entsteht wieder eine isolierte Untergruppe I; umgekehrt kann *jede* isolierte Untergruppe von F auf eine dieser Weisen gewonnen werden.

man nicht zum mindesten bei abzählbarem $\mathsf{M} = \mathsf{M}_0$ den Typus von K völlig bestimmen, also eine bekannte, zu K ordnungsisomorphe Menge K^* angeben kann. Allerdings wäre das offenbar in einfacher Weise nur möglich, wenn für $\mathsf{M} = \mathsf{M}_0$ alle durch einen nichttrivialen Ultrafilter Φ definierten Ordnungen von G den gleichen Typus besitzen. Aber gerade diese Vermutung liegt nicht allzu fern (vgl. Satz 14 in § 6). Will man also bei den mit den Sätzen 7 bis 10 gewonnenen Resultaten nicht stehenbleiben, so wird man am besten als Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen die genauere Strukturanalyse von K unter der Annahme $\mathsf{M} = \mathsf{M}_0$ wählen. — Hier begnügen wir uns mit dem Erreichten und fragen nur nach den Modifikationen, die sich ergeben, wenn wir statt ganzzahligen reellwertige Funktionen, also R statt G betrachten. Zunächst läßt sich Satz 8 in der folgenden Form übertragen:

Satz 11. a) *Die Ordnung $\mathfrak{T}$ von R ist dann und nur dann archimedisch, wenn es in Φ keine Folge $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ mit $\bigcap_n A_n = \emptyset$ gibt.* — b) *Ist $\mathfrak{T}$ archimedisch, so ist R/H_T stets zur Additionsgruppe R^* aller reellen Zahlen isomorph.*

Beweis. a) Existiert in Φ eine Folge A_n, so ist bereits die Ordnung $\mathfrak{T}'$ der Untergruppe G von R nicht archimedisch, also erst recht die Ordnung $\mathfrak{T}$ von R. Soll andererseits $\mathfrak{T}$ nicht archimedisch sein, so muß in T entweder ein f mit $f_1 \gg f$ oder ein f mit $f \gg f_1$ existieren. Ist etwa $f \gg f_1$, so können wir wegen $f \not\equiv 0$ von vornherein annehmen, daß $A(f = 0) = \emptyset$. Setzen wir dann etwa $A_n = A(f \leqq 10^{-n})$, so müssen wegen $f_1 \gg f$ alle A_n in Φ liegen, und man hat $A_n \supseteq A_{n+1}$, $\bigcap_n A_n = \emptyset$. — Ist andererseits $f \gg f_1$, so arbeite man mit den Mengen $A(f \geqq n)$ statt mit den $A(f \leqq 10^{-n})$. — b) Daß R/H_T, falls archimedisch, zu R^* isomorph sein muß, folgt daraus, daß T für jedes positive reelle ϱ die durch „$f(\mu) = \varrho$ für alle μ“ definierte Funktion $\varrho \cdot f_1$ enthält.

Im *nichtarchimedischen* Fall sieht man weiter mühelos: *Es gilt der volle Satz 10.* Denn es lassen sich ja alle beim Beweis benutzten Schlüsse ebenso wie in G auch in R durchführen. Darüber hinaus erhält man diesmal noch: *Zu jeder Folge $f^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ aus T gibt es in T ein $\bar{f}$ mit $f^{(i)} \gg \bar{f}$ $(i = 1, 2, \ldots)$.* Man nehme nämlich von vornherein alle $f^{(i)}$ so präpariert an, daß sie für kein μ verschwinden, gehe von einer in Φ liegenden Folge A_n mit $A_n \supseteq A_{n+1}$, $\bigcap_n A_n = \emptyset$ aus und setze $\bar{f}(\mu) = 0$ $(\mu \in \mathsf{M} - A_1)$, $\bar{f}(\mu) = (n+1)^{-1} \cdot \min\left(f^{(1)}(\mu), \ldots, f^{(n)}(\mu)\right)$ auf $A_n - A_{n+1}$. Im übrigen Schlüsse wie üblich. — Bei R enthält also im Gegensatz zu G im nichtarchimedischen Fall die zugehörige Klassenmenge K nicht nur kein größtes sondern auch kein kleinstes Element. Sonst ergeben sich keine bemerkenswerten neuen Gesichtspunkte. — Fragen wir schließlich noch nach einfachen Untergruppen von R und G, bei denen sich für alle nichttrivialen Ultrafilter Φ genauere Aussagen über die zugehörige Ordnung $\mathfrak{T}$ machen lassen, so erhalten wir:

Satz 12. *Die Ordnung $\mathfrak{T}$ der Gruppe H bzw. H' aller der reellen bzw. ganzzahligen Funktionen, die nur endlich viele verschiedene Werte annehmen, ist stets archimedisch, bzw. diskret.*

Sind nämlich $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die endlich vielen Werte der Funktion f aus H bzw. H' und setzt man $A_i = A(f = \alpha_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, so muß wegen $\mathsf{M} = A_1 \cup \cdots \cup A_n$

ein A_i, etwa A_{i_0}, zu Φ gehören und es ist dann $f = f_{\alpha_{i_0}}$, falls f_{α_i} durch „$f_{\alpha_i}(\mu) = \alpha_i$ für alle μ" definiert wird. (Vgl. den Beweis der „Alternative" unmittelbar vor Satz 7.) - Man beachte: Die Gruppe H' kann auch definiert werden als die Gruppe aller ganzzahligen beschränkten Funktionen. Im reellwertigen Fall wäre es *nicht* zulässig, in Satz 12 die Gruppe H aller endlichwertigen durch die echte Obergruppe aller beschränkten Funktionen zu ersetzen. Denn man kann ja bei nichtarchimedischer Ordnung von R stets beschränkte Funktionen bilden, die gegenüber f_1 klein sind. Über den trivialen in Satz 12 erfaßten Fall, ist also auch bei R nicht hinauszukommen.

Bei einer beliebigen, total, aber nicht archimedisch geordneten Gruppe kann man von der gegebenen totalen Ordnung $\mathfrak{T}$ zu einer zwar vergröberten aber häufig auch wesentlich vereinfachten totalen Ordnung $\overline{\mathfrak{T}}$ kommen, wenn man in T von einer echten „isolierten" Unterhalbgruppe ausgeht, d.h. von einer echten Unterhalbgruppe I, die gleichzeitig mit f auch alle $g < f$ enthält[12]). Es wird dann die Menge $\overline{T}$ aller Elemente der Form $f - g$ ($f \in T$, $g \in I$) eine T umfassende T-Halbgruppe, und die zugehörige Ordnung $\overline{\mathfrak{T}}$ ist die gesuchte Vergröberung von $\mathfrak{T}$. Die $\overline{\mathfrak{T}}$ entsprechende Klassenmenge $\overline{K}$ entsteht aus der Klassenmenge K von $\mathfrak{T}$ einfach dadurch, daß man das „Anfangsstück" aller Klassen $\mathfrak{k} \in K$, die von zu I gehörigen Elementen gebildet werden, wegläßt. — Handelt es sich nun speziell um eine durch einen nichttrivialen Ultrafilter Φ definierte, totale nichtarchimedische Ordnung der Gruppe G (oder auch der Gruppe R), so ergibt sich aus Satz 10 und seinen Folgerungen sofort: *Der Übergang von $\mathfrak{T}$ zu einer Vergröberung $\overline{\mathfrak{T}}$ bedeutet keine Vereinfachung.* Denn die Klassenmenge $\overline{K}$ ist in ihrer Struktur ebenso schwer zugänglich wie die Klassenmenge K.

§ 5. Restriktionsordnungen und Integral

Wie schon aus den Betrachtungen von § 2 hervorgeht, hat die allgemein brauchbare Methode der Definition von totalen Ordnungen der Funktionengruppen F mit Hilfe von Ultrafiltern aus B den Nachteil, daß diese Ultrafilter im allgemeinen nicht konstruktiv erfaßt werden können. § 4 zeigte darüber hinaus, daß die durch die Ultrafilter festgelegten Ordnungen in der Regel eine völlig aus dem gewohnten Rahmen herausfallenden Typ besitzen. Es muß unter diesen Umständen hervorgehoben werden, daß in vielen wichtigen Spezialfällen die natürliche Ordnung $\mathfrak{O}$ von F auf eine andere, einfache und der Eigenart des Sonderfalls angemessene Art als Konjunktion von totalen Ordnungen $\mathfrak{T}_\tau$ dargestellt werden kann, wobei häufig die $\mathfrak{T}_\tau$ obendrein archimedisch werden. Die Methode, die wir hier im Auge haben, liegt vor allem dann nahe, wenn in der gegebenen Funktionengruppe F ein *Integral* definiert ist. Dementsprechend sollen einige Bemerkungen über diejenigen Eigenschaften des Integralbegriffs an die Spitze gestellt werden, die von unserem, auf die totalen Ordnungen eingestellten Standpunkt als wesentlich erscheinen.

---

[12]) Zu dem Begriff der Vergröberung einer Ordnung vgl. z.B. Krull [1], § 4. (Der Vergröberung im Sinne des Textes entspricht dort der Übergang von Γ zu Γ/Δ.)

Es sei im Verband $\mathfrak{B}$ aller Untermengen von $\mathfrak{M}$ ein Verband Δ ausgezeichnet, der jedenfalls $\mathfrak{M}$ nicht zu enthalten braucht[13]) und dessen Elemente wir gelegentlich als „meßbar" bezeichnen, ohne aber im allgemeinen mit diesem Wert einen über die Zugehörigkeit zu Δ hinausgehenden Sinn zu verbinden. Der Bequemlichkeit halber wollen wir voraussetzen, es sei F zum mindesten hinsichtlich aller meßbaren Mengen $\mathfrak{N}$ r-zerlegbar im Sinne von § 3[14]). Mit $\tilde{f}_{\mathfrak{N}}$ bezeichnen wir die $\mathfrak{N}$-Restriktion von f, also das homomorphe Bild von f in $\tilde{F}_{\mathfrak{M}-\mathfrak{N}}$. Von einem in F relativ Δ definierten *Integral* sprechen wir, wenn jeder meßbaren Menge $\mathfrak{N}$ eine totale, *normierte* archimedische Ordnung $\tilde{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{N}}$ von $\tilde{F}_{\mathfrak{M}-\mathfrak{N}}$, also eine feste[15]) homomorphe Abbildung von $\tilde{F}_{\mathfrak{M}-\mathfrak{N}}$ in die geordnete Additionsgruppe aller reellen Zahlen zugeordnet ist, und wenn dabei die folgende *Additivitätsbedingung* besteht: Sind $\mathfrak{N}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ elementefremde meßbare Mengen und bedeutet α_i $(i=1, \ldots, n)$ bzw. α das Bild der Restriktion $\tilde{f}_{\mathfrak{N}_i}$ bzw. $\tilde{f}_{\mathfrak{N}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{N}_n}$ relativ $\tilde{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{N}_i}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{N}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{N}_n}$, so ist stets $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Für unsere augenblicklichen Zwecke ist die Additivitätsbedingung nebensächlich. Wesentlich dagegen ist, daß jede totale Ordnung $\tilde{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{N}}$ unmittelbar eine totale Ordnung $\mathfrak{T}_{\mathfrak{N}}$ von F selbst definiert. Denn über das Mittelglied $\tilde{f}_{\mathfrak{N}}$ ordnet sie ja jedem $f \in F$ als homomorphes Bild eine bestimmte reelle Zahl zu. Sowie also zu F ein Integral gegeben ist, erhebt sich vom Standpunkt der geordneten Gruppen aus die Frage: *Wird für die durch das Integral gelieferten totalen Ordnungen* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{N}}$ *die natürliche Ordnung* $\mathfrak{O}$ *von* F *gleich der Konjunktion aller* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{N}}$?

Besonders wichtig ist dabei die folgende Bemerkung: Ist $\mathfrak{P}$ ein Antifilter aus $\mathfrak{M}$, so entsteht aus dem Untermengenverband $\mathfrak{B}$ bzw. Δ ein „Restklassen-

[13]) In der Analysis wird $\mathfrak{M} \in \Delta$ in der Regel erfüllt sein, da man dort, wenn man vom gleichen Punkte ausgeht wie im Text, von vornherein die additive Gruppe aller auf einer bestimmten Menge $\mathfrak{M}$ integrablen Funktionen zugrundelegen wird, so daß die Menge $\mathfrak{M}$ im Sinne des Textes als meßbar anzusehen ist, auch wenn sie im Sinne der Analysis kein endliches Maß besitzt. — Andererseits wäre z. B. bei Beispiel a) unseres Paragraphen die Aufnahme von $\mathfrak{M}$ in Δ nicht möglich. — In der Analysis ist Δ in der Regel *subtraktiv*, d. h. aus $\mathfrak{N}_i \in \Delta$ $(i=1, 2)$ folgt $\mathfrak{N}_i - (\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2) \in \Delta$. Für uns ist diese Subtraktivität unwesentlich. — Grundsätzlich sei betont: Im Texte soll nicht der Integralbegriff systematisch aus dem Ordnungsbegriff abgeleitet werden. Es kommt nur auf die zu den Beispielen a) bis d) näher erläuterte Bedeutung des Integrals für das Konjunktionsproblem der Ordnungen an.

[14]) Die Forderung, F solle r-zerlegbar sein, ist also hier etwas schwächer als in § 3. Es wird nur gefordert, daß jede Spaltung $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$, bei der mindestens $\mathfrak{M}_1$ meßbar ist auf dem Wege über die Restriktionsbildung zu einer direkten Zerlegung von F führt.

[15]) Die Normierung kann bekanntlich dadurch erfolgen, daß man für *ein* hinsichtlich $\tilde{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{N}}$ echt positives Element $\tilde{f}_{\mathfrak{N}}$ aus $\tilde{F}_{\mathfrak{M}-\mathfrak{N}}$ den positiven Zahlwert vorschreibt, auf den $\tilde{f}_{\mathfrak{N}}$ durch $\tilde{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{N}}$ abgebildet werden soll — falls nicht die hier ausnahmsweise nicht auszuschließende Möglichkeit vorliegt, daß $\tilde{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{N}}$ die „uneigentliche" Totalordnung ist, die der T-Halbgruppe $\tilde{T}_{\mathfrak{N}} = \tilde{F}_{\mathfrak{M}-\mathfrak{N}}$ entspricht, die also *alle* Elemente von $\tilde{F}_{\mathfrak{M}-\mathfrak{N}}$ auf die 0 abbildet.

Verband" $\widetilde{\mathsf{B}}_{\mathsf{P}}$ bzw. $\widetilde{\Delta}_{\mathsf{P}}$, wenn wir zwei Mengen $\mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2$ aus B bzw. Δ gleichsetzen, falls $(\mathsf{N}_1 \cup \mathsf{N}_2) - (\mathsf{N}_1 \cap \mathsf{N}_2) \in \mathsf{P}$ hat. Hat nun ein zu F gehöriges Integral die Eigenschaft, daß es die N_1- und N_2-Restriktion von $f \in F$ immer auf die gleiche reelle Zahl abbildet, wenn N_1 und N_2 der gleichen Mengenklasse in $\widetilde{\mathsf{B}}_{\mathsf{P}}$ angehören, so kann man von einem zu $\widetilde{F}_{\mathsf{P}}$ relativ $\widetilde{\Delta}_{\mathsf{P}}$ gehörigen Integral reden, und es besteht die Möglichkeit, daß das gegebene Integral unmittelbar eine Konjunktionsdarstellung der natürlichen Ordnung von $\widetilde{F}_{\mathsf{P}}$ durch totale Ordnungen liefert. — Wir erläutern die praktische Brauchbarkeit des Integralbegriffs für das Konjunktionsproblem an drei einfachen Beispielen:

a) M sei ganz beliebig, $\Delta = \mathsf{E}$ sei der Verband aller endlichen Untermengen Δ_e von M. Als „Integration" in F werde die gewöhnliche, jeweils über alle $\mu \in \Delta_e$ zu erstreckende Summation gewählt. Es sei also $\sum_{\mu \in \Delta_e} f(\mu) = \int_{\Delta_e} f$ das Bild, das der Δ_e-Restriktion $\tilde{f}_{\Delta_e}$ zugeordnet wird, und es sei dementsprechend die Ordnung $\mathfrak{T}_{\Delta_e}$ von F definiert durch die Vorschrift: „$f > g$ dann und nur dann, wenn $\sum_{\mu \in \Delta_e} \big(f(\mu) - g(\mu)\big) \geqq 0$". Hier folgt der Satz, daß $\mathfrak{D}$ die Konjunktion aller $\mathfrak{T}_{\Delta_e}$ darstellt, bereits aus der Bemerkung, daß die den trivialen Ultrafiltern aus M entsprechenden totalen Ordnungen von F zu den $\mathfrak{T}_{\Delta_e}$ gehören. Wir haben also hier in a) eine Verallgemeinerung der Methode der Totalordnung durch triviale Ultrafilter vor uns, die aber im Rahmen unserer Arbeit nicht weiter interessant ist, da die Ordnungen $\mathfrak{T}_{\Delta_e}$ sämtlich unbrauchbar werden, wenn wir von F zu der mit Hilfe eines E umfassenden Antiultrafilters P gebildeten Restklassengruppe $\widetilde{F}_{\mathsf{P}}$ übergehen wollen.

b) Es sei M ein Intervall, $\{a \leqq \mu \leqq b\}$ ein abgeschlossenes Intervall der reellen Zahlgeraden, F bestehe aus allen in M *stetigen* Funktionen. Δ sei der Verband aller abgeschlossenen Teilintervalle von M. Als Integral werde das von Riemann benutzt, also $\int_{\Delta \in \Delta} f = \int_{a_1}^{b_1} f(\mu)\, d\mu$, falls $\Delta = \{a_1 \leqq x \leqq b_1\}$. — Hier haben wir $\mathfrak{T}_\Delta$ festgelegt durch „$f > g$, wenn $\int_{a_1}^{b_1} \big(f(\mu) - g(\mu)\big)\, d\mu \geqq 0$", und die Tatsache, daß $\mathfrak{D}$ Konjunktion aller $\mathfrak{T}_\Delta$ ist, folgt aus dem wohlbekannten Satz: Im Falle der Stetigkeit ist dann und nur dann $\int_{a_1}^{b_1} f(\mu)\, d\mu \geqq 0$ für alle, Paare a_1, b_1 mit $a \leqq a_1 < b_1 \leqq b$, wenn $f(\mu) \geqq 0$ für alle μ in $a \leqq x \leqq b$. — Der Konjunktionssatz für $\mathfrak{D}$ ist also zwar richtig, aber doch nicht selbstverständlich.

c) Wählt man in dem Beispiel von b) statt der Gruppe aller stetigen für F die Gruppe aller beschränkten, Riemannsch-integrablen Funktionen, so gilt der Konjunktionssatz für $\mathfrak{D}$ (also in der Halbgruppensprache die Gleichung $O = \bigcap_{\Delta \in \Delta} T_\Delta$, wobei T_Δ die zu $\mathfrak{T}_\Delta$ gehörige T-Halbgruppe) nicht mehr, aber es taucht dafür ein neuer Gesichtspunkt auf: Am Riemannschen Integral ändert sich nichts, wenn man die Funktionswerte des Integranden an endlich vielen Stellen ändert. Das bedeutet, daß man ohne weiteres das Riemannsche Integral auch interpretieren kann als ein Integral im Sinne des Textes,

das zu der Funktionengruppe $\widetilde{F}_{\mathsf{E}}$ hinsichtlich des Teilbereiches $\widetilde{\Delta}_{\mathsf{E}}$ von $\widetilde{\mathsf{B}}_{\mathsf{E}}$ gehört. Allerdings wird dadurch kein wesentlicher Fortschritt erzielt. Denn auch für $\widetilde{T}_{\mathsf{E}}$ läßt sich mit Hilfe des RIEMANNschen Integrals keine Konjunktionsdarstellung der natürlichen Ordnung $\widetilde{\mathfrak{O}}_{\mathsf{E}}$ durch totale Ordnungen gewinnen. (Man beachte z. B., daß man bei einer stetigen Funktion auch an abzählbar unendlich vielen Stellen die Werte abändern kann, ohne am Integral etwas zu ändern, wobei allerdings die Lage dieser Stellen sich nicht mehr beliebig vorschreiben läßt.)

d) Im Gegensatz zu c) kommt man wieder zu einem befriedigenden Konjunktionssatz, wenn man M wie in b) und c) definiert, aber statt des RIEMANNschen Integrals das LEBESGUEsche zugrunde legt und für Δ bzw. F dementsprechend den Verband aller LEBESGUEsche meßbaren Untermengen von M bzw. die Menge aller beschränkten und (LEBESGUEsch) meßbaren Funktionen wählt. Hier ist es zunächst klar, daß man das Integral naturgemäß nicht als zu F hinsichtlich Δ ansehen wird, sondern daß man F und Δ durch $\widetilde{F}_{\mathsf{P}_L}$ bzw. $\widetilde{\Delta}_{\mathsf{P}_L}$ zu ersetzen hat, wobei P_L den Antifilter aller der Untermengen von M bedeutet, die das LEBESGUEsche Maß 0 besitzen. Der Konjunktionssatz für die natürliche Ordnung von $\widetilde{F}_{\mathsf{P}_L}$ bezüglich der durch das LEBESGUEsche Integral definierten totalen Ordnungen von $\widetilde{F}_{\mathsf{P}_L}$ folgt dann sofort aus dem wohlbekannten Theorem: Ist f eine meßbare Funktion, so ist $\Delta^-(f)$ eine meßbare Menge, und es wird das über $\Delta^-(f)$ mit f als Integranden gebildete LEBESGUEsche Integral negativ, falls nicht $\Delta^-(f) \in \mathsf{P}_L$.

Das Beispiel c) ist vor allem deshalb bemerkenswert, weil hier in einem konkreten Einzelfalle gezeigt ist: Auch bei einer Restklassengruppe einer Funktionengruppe, bei der nicht mehr sinnvoll von den zu den einzelnen Stellen gehörigen Funktionswerten gesprochen werden kann, ist es unter Umständen möglich, das Konjunktionsproblem für die natürliche Ordnung allein mit Hilfe von *archimedischen* Totalordnungen zu lösen. Allerdings kommt man dabei nicht mit der Ultrafiltermethode zum Ziel; man muß andere, dem Spezialfall angepaßte Begriffsbildungen heranziehen, in unserem Fall das Integral.

§ 6. Die Ordnungen $\mathfrak{T}_{\mathsf{N}}$ und $\mathfrak{T}_{\mathfrak{A}_{\mathsf{N}}}$

Entsprechend wie in § 5 denken wir uns die auftretenden Ordnungen normiert. Jede Ordnung von F soll also ein bestimmter Homomorphismus $F \to A$ von F auf eine streng total geordnete Abelsche Gruppe sein. Zwei Ordnungen $F \to A$ und $F \to A'$ haben den *gleichen Typ*, wenn A und A' ordnungsisomorph aufeinander abgebildet werden können. Wir wollen zeigen, daß sich unter Umständen der Begriff der Restriktion benützen läßt, um für die natürliche Ordnung $\mathfrak{O}$ von F eine Konjunktionsdarstellung durch totale Ordnungen $\mathfrak{T}_\tau$ abzuleiten, bei der die $\mathfrak{T}_\tau$ alle den gleichen Typ haben. — Wie schon bisher benutzt, führt jede totale Ordnung $\widetilde{\mathfrak{T}}_{\mathsf{N}}$ einer Restriktionsgruppe $\widetilde{F}_{\mathsf{M}-\mathsf{N}}$ von F unmittelbar zu einer totalen Ordnung $\mathfrak{T}_{\mathsf{N}}$ von F selbst,

einfach wegen der Existenz des kanonischen Homomorphismus $\mathfrak{H}_{\mathsf{N}}$ von F auf $\widetilde{F}_{\mathsf{M}-\mathsf{N}}$. Das Schema läßt sich dabei anschaulich so charakterisieren:

$$(1) \qquad [\{F \to \widetilde{F}_{\mathsf{M}-\mathsf{N}}(\mathfrak{H}_{\mathsf{N}})\};\ \{\widetilde{F}_{\mathsf{M}-\mathsf{N}} \to A_{\mathsf{N}}(\widetilde{\mathfrak{T}}_{\mathsf{N}})\}] \Rightarrow \{F \to A_{\mathsf{N}}(\mathfrak{T}_{\mathsf{N}})\}.$$

Wir nehmen nun ferner an, es gäbe eine bestimmte *isomorphe* Abbildung $\mathfrak{A}_{\mathsf{N}}$ von F auf $\widetilde{F}_{\mathsf{M}-\mathsf{N}}$ (die natürlich mit dem kanonischen Homomorphismus $\mathfrak{H}_{\mathsf{N}}$ nichts zu tun hat); $\mathfrak{T}$ sei eine gegebene Ordnung $F \to A$ von F. Dann gewinnt man eine im allgemeinen von $\mathfrak{T}$ verschiedene Ordnung $\mathfrak{T}_1$ von F, indem man zunächst mit Hilfe von $\mathfrak{A}_{\mathsf{N}}$ aus $\mathfrak{T}$ eine Ordnung $\widetilde{\mathfrak{T}}$ von $\widetilde{F}_{\mathsf{M}-\mathsf{N}}$ ableitet und anschließend von $\widetilde{\mathfrak{T}} = \widetilde{\mathfrak{T}}_{\mathsf{N}}$ zur zugehörigen Ordnung $\mathfrak{T}_{\mathsf{N}} = \mathfrak{T}_1$ von F zurückgeht. Der Bildungsmechanismus von $\mathfrak{T}_1$ läßt sich anschaulich folgendermaßen beschreiben:

$$(2) \qquad \begin{cases} [\{f \to \alpha(\mathfrak{T})\};\ \{\tilde{f}_{\mathsf{N}} \leftrightarrow f(\mathfrak{A}_{\mathsf{N}})\}] \Rightarrow \{\tilde{f}_{\mathsf{N}} \to \alpha(\widetilde{\mathfrak{T}}_{\mathsf{N}})\}; \\ [\{f_1 \to \tilde{f}_{\mathsf{N}}(\mathfrak{H}_{\mathsf{N}})\};\ \{\tilde{f}_{\mathsf{N}} \to \alpha(\widetilde{\mathfrak{T}}_{\mathsf{N}})\}] \Rightarrow \{f_1 \to \alpha(\mathfrak{T}_{\mathsf{N}})\}. \end{cases}$$

In (2) durchläuft f alle Elemente von F, $\tilde{f}_{\mathsf{N}}$ alle von $\widetilde{F}_{\mathsf{M}-\mathsf{N}}$; ebenso durchläuft α in allen Einzelformen *alle* Elemente von A und f_1 in den beiden letzten Formeln wieder *alle* Elemente von F. Es ist also tatsächlich $\mathfrak{T}_{\mathsf{N}}$ wieder eine Ordnung der Gruppe F, und zwar *haben* $\mathfrak{T}$ *und* $\mathfrak{T}_{\mathsf{N}}$ *den gleichen Typ*, weil sie F auf ein und dieselbe Gruppe A abbilden.

Um die bisherigen grundsätzlichen Überlegungen konkret anzuwenden, betrachten wir auf einer abzählbaren Argumentmenge $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots\}$ die Gruppe G aller ganzzahligen Funktionen und wählen bei den folgenden Betrachtungen für N stets eine unendliche und damit abzählbare Untermenge von M. Dann gibt es stets (unendlich viele) eindeutig umkehrbare Abbildungen $\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}$ von M auf N und jeder Abbildung $\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}$ entspricht ein Isomorphismus $\mathfrak{A}_{\mathsf{N}}$ von F auf $\widetilde{F}_{\mathsf{M}-\mathsf{N}}$. [Das Bild von f bei $\mathfrak{A}_{\mathsf{N}}$ ist definiert durch „$\tilde{f}_{\mathsf{N}}(\mu_{\mathsf{N}}) = f(\mu)$, falls μ_{N} Bild von μ bei $\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}$“.] — Ist ferner Φ irgendein Ultrafilter aus B mit dem zugehörigen Antiultrafilter Π, so wird Φ, Π durch $\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}$ im Verband B_{N} aller Untermengen von N ein Paar $\Phi_{\mathsf{N}}, \Pi_{\mathsf{N}}$ zugeordnet. Jedem Paar $\Phi_{\mathsf{N}}, \Pi_{\mathsf{N}}$ wiederum entspricht in B ein kanonisches Urbildpaar Φ_1, Π_1, und zwar besteht Φ_1 bzw. Π_1 aus allen den $A \in \mathsf{B}$, bei denen $A \cap \mathsf{N} \in \Phi_{\mathsf{N}}$ bzw. $A \cap \mathsf{N} \in \Pi_{\mathsf{N}}$. (Die Verifikation der Tatsache, daß so tatsächlich immer aus einem zusammengehörigen Ultrafilter-Antiultrafilterpaar aus B_{N} ein entsprechendes Paar aus B gewonnen wird, ist trivial.) Φ_1, Π_1 kann als das mit Hilfe von $\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}$ aus Φ, Π abgeleitete Paar bezeichnet werden. Man sieht sofort:

Ist $\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}$ *eine eindeutig umkehrbare Abbildung von* M *auf* N *und* $\mathfrak{A}_{\mathsf{N}}$ *die entsprechende Abbildung von* F *auf* $\widetilde{F}_{\mathsf{M}-\mathsf{N}}$, *bedeutet ferner* $\mathfrak{T}$ *die dem Ultrafilter* Φ *aus* B *zugeordnete Ordnung von* F, *so gehört die mit Hilfe von* $\mathfrak{A}_{\mathsf{N}}$ *aus* $\mathfrak{T}$ *abgeleitete Ordnung* $\mathfrak{T}_1$ *von* F *zu dem mit Hilfe von* $\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}$ *aus* Φ *abgeleiteten Ultrafilter aus* B.

Wir gehen nun aus von einer beliebigen Ordnung $\mathfrak{T}$ von F mit der T-Halbgruppe $T > O$; mit $\mathfrak{T}_{\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}}$ bzw. $T_{\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}}$ bezeichnen wir die aus $\mathfrak{T}$ mit Hilfe

von $\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}$ und der zugehörigen Abbildung $\mathfrak{A}_{\mathsf{N}}$ abgeleitete Ordnung $\mathfrak{T}_1$ bzw. ihre T-Halbgruppe. Gefragt wird zunächst: Läßt sich die natürliche Ordnung $\mathfrak{O}$ als Konjunktion von Ordnungen $\mathfrak{T}_{\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}}$ darstellen, gibt es also $O = \bigcap_{\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}} T_{\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}}$ bei passender Wahl der $\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}$? Es ergibt sich leicht:

$\mathfrak{O}$ ist sicher dann Konjunktion von Ordnungen $\mathfrak{T}_{\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}}$, wenn mindestens ein μ_0 existiert, derart daß $f(\mu_0) \geqq 0$ für alle $f \in T$.

Ist nämlich unsere Bedingung erfüllt, gibt es etwa in T kein f mit $f(1) < 0$, und bedeutet $\mathfrak{a}_{\mathsf{M}}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ eine Abbildung von M auf sich selbst, bei der 1 in i übergeht, so gibt es in $T_{\mathfrak{a}_{\mathsf{M}}^{(i)}}$ kein f mit $f(i) < 0$, es wird also $O = \bigcap_i T_{\mathfrak{a}_{\mathsf{M}}^{(i)}}$. Kritisch ist zu unserem Resultat zu bemerken: Enthält T kein f mit $f(1) < 0$, so ist $T \subseteqq T_{\Phi_1}$, falls Φ_1 den $\mu = 1$ entsprechenden trivialen Ultrafilter und T_{Φ_1} die durch Φ_1 bestimmte T-Halbgruppe bedeutet. Es stellt also die Ordnung $\mathfrak{T}$ eine Verfeinerung der Ordnung $\mathfrak{T}_{\Phi_1}$ dar, und in gleicher Weise ergibt sich sofort, daß $\mathfrak{T}_{\mathfrak{a}_{\mathsf{M}}^{(i)}}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{T}_{\Phi_i}$ sein muß, falls Φ_i der zu $\mu = i$ gehörige triviale Ultrafilter. $\bigcap_i T_{\mathfrak{a}_{\mathsf{M}}^{(i)}} = O$ ist also eine unmittelbare Konsequenz von $\bigcap_i T_{\Phi_i} = O$, und unsere bisherigen Überlegungen sind uninteressant, sofern man nicht speziell die Verfeinerungen der Ordnungen $\mathfrak{T}_{\Phi_1}$ untersuchen will[16]).

Um zu nichttrivialen Resultaten zu kommen, betrachten wir unter Auszeichnung eines bestimmten Antifilters P und des zugehörigen komplementären Filters Ψ analog wie in § 3 die Halbgruppe O_Ψ aller $f \in G$ mit $\Lambda^-(f) \in \mathsf{P}$. Von P wollen wir jedenfalls voraussetzen, daß alle endlichen Untermengen von M in P liegen, $\mathsf{P} \supseteqq \mathsf{E}$. In Übereinstimmung der in § 2 bei Filtern benutzten Terminologie sagen wir, der Antifilter P sei *abzählbar*, wenn er eine *abzählbare Basis* besitzt, d.h. wenn sich $\mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2, \ldots$ in P so bestimmen lassen, daß P gerade aus allen Untermengen der N_i besteht.

Hilfssatz. *Ist P abzählbar und ist $\overline{\mathsf{N}}$ eine beliebige nicht zu P gehörige Untermenge von M, so gibt es stets eine umkehrbar eindeutige Abbildung $\mathfrak{a}_{\overline{\mathsf{N}}}$ von M auf $\overline{\mathsf{N}}$, derart daß jede zu P gehörige Untermenge $\overline{\Lambda}$ von $\overline{\mathsf{N}}$ in M ein gleichfalls zu P gehöriges Urbild Λ hat.*

Wie unmittelbar zu sehen, darf man von der Basis von P voraussetzen, daß $\mathsf{N}_{i+1} \supset \mathsf{N}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$; wegen $\mathsf{E} \subseteqq \mathsf{P}$ hat man dann $\bigcup_i \mathsf{N}_i = \mathsf{M}$. Wir setzen $\overline{\mathsf{N}}_i = \overline{\mathsf{N}} \cap \mathsf{N}_i$ und erhalten $\overline{\mathsf{N}} = \bigcup_i \overline{\mathsf{N}}_i$, $\overline{\mathsf{N}}_{i+1} \supseteqq \overline{\mathsf{N}}_i$; außerdem ist klar, daß die Untermengen der $\overline{\mathsf{N}}_i$ gerade die sämtlichen zu P gehörigen Untermengen von $\overline{\mathsf{N}}$ darstellen. Beachten wir noch, daß aus $\Lambda_k \in \mathsf{P}$ $(k = 1, 2)$ stets $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \in \mathsf{P}$

[16]) Daß unendlich viele Verfeinerungen etwa von $\mathfrak{T}_{\Phi_1}$ existieren, ist klar. Man hat nur in der Gruppe $\overline{F}_{\Phi_1}$ aller $f \in G$ mit $f(1) = 0$ irgendeine T-Halbgruppe $\overline{T}_1$ zu wählen. Dann bildet die Menge $(T - \overline{F}_{\Phi_1}) \cup \overline{T}_1 = T_1$ eine T-Halbgruppe in G, die eine Verfeinerung $\mathfrak{T}_1$ von $\mathfrak{T}_\Phi$ definiert. — Bei einer T-Halbgruppe $T > O$, die für jedes μ ein f mit $f(\mu) < 0$ enthält, liegt die Vermutung nahe, daß der über alle $\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}$ erstreckte Durchschnitt $\bigcap_{\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}} T_{\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}}$ stets eine *echte* Obergruppe von O wird. Indessen stößt ein Beweisversuch auf Schwierigkeiten und noch aussichtsloser erscheint der Versuch, die Vermutung durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen.

folgt, so sehen wir sofort: Der Hilfssatz ist richtig, wenn man zeigen kann: Die Abbildung $\mathfrak{a}_{\overline{\mathsf{N}}}$ läßt sich so bestimmen, daß für $\Lambda_1 = \mathsf{N}_1$, $\Lambda_{i+1} = \mathsf{N}_{i+1} - \mathsf{N}_i$, $\overline{\Lambda}_1 = \overline{\mathsf{N}}_1$, $\overline{\Lambda}_{i+1} = \overline{\mathsf{N}}_{i+1} - \overline{\mathsf{N}}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ jedes Urbild eines $\overline{\Lambda}_i$ Untermenge eines $\mathsf{N}_k = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \cdots \cup \Lambda_k$ ist. Beim Beweis dieser letzten Behauptung unterscheiden wir zwei Fälle: a) Es seien unendlich viele $\overline{\Lambda}_i$ unendlich, etwa $\overline{\Lambda}_{i_1}, \overline{\Lambda}_{i_2}, \overline{\Lambda}_{i_3}, \ldots$. Dann sind wegen $\Lambda_i \supseteqq \overline{\Lambda}_i$ auch $\Lambda_{i_1}, \Lambda_{i_2}, \ldots$ unendlich; es gibt infolgedessen für $k_1 = 1, 2, \ldots$ stets eine Abbildung $\mathfrak{a}^{(k)}$ von

$$\Lambda_{i_{k-1}+1} \cup \Lambda_{i_{k-1}+2} \cup \cdots \cup \Lambda_{i_k} \quad \text{auf} \quad \overline{\Lambda}_{i_{k-1}+1} \cup \overline{\Lambda}_{i_{k-1}+2} \cup \cdots \cup \overline{\Lambda}_{i_k}.$$

Die Abbildungen $\mathfrak{a}^{(k)}$ zusammengenommen definieren eine Abbildung $\mathfrak{a}_{\overline{\mathsf{N}}}$, die offenbar unserer Bedingung genügt. b) Es seien nur endlich viele $\overline{\Lambda}_i$ unendlich, Λ_I sei die letzte Menge dieser Art[17]). Dann sind jedenfalls immer noch unendlich viele $\overline{\Lambda}_i$ von $\emptyset$ verschieden. Denn andernfalls hätten wir: $\overline{\mathsf{N}} = \overline{\Lambda}_1 \cup \overline{\Lambda}_2 \cup \cdots = \overline{\Lambda}_1 \cup \cdots \cup \overline{\Lambda}_n = \overline{\mathsf{N}}_n \in \mathsf{P}$, während $\overline{\mathsf{N}} \notin \mathsf{P}$ vorausgesetzt war. Es existiert also sicher eine Abbildung $\mathfrak{a}$ von $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \cdots \cup \Lambda_I$ auf $\overline{\Lambda}_1 \cup \cdots \cup \overline{\Lambda}_I$ und eine Abbildung $\mathfrak{a}'$ von $\Lambda_{I+1} \cup \Lambda_{I+2} \cup \cdots$ auf $\overline{\Lambda}_{I+1} \cup \overline{\Lambda}_{I+2} \cup \cdots$. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ zusammen definieren wegen der Endlichkeit aller $\overline{\Lambda}_{I+l}$ $(l = 1, 2, \ldots)$ eine der benötigten Abbildungen $\mathfrak{a}_{\overline{\mathsf{N}}}$. — Auf Grund des Hilfssatzes beweisen wir jetzt

Satz 13. *Ist* P *ein abzählbarer Antifilter,* T *eine* O_Ψ *umfassende* T*-Halbgruppe, so wird dann und nur dann* $O_\Psi = \bigcap_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}} T_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}}$, *wenn* T *kein* f *mit* $\Lambda(f) \in \mathsf{P}$ *enthält.*

a) Aus $f \in T$, $\Lambda(f) \in \mathsf{P}$, $O_\Psi \subseteqq T$ und der Definition von O_Ψ folgt die Existenz eines $g \in T$ mit $\Lambda^-(g) = \mathsf{M}$. [Man setze $g = f + g'$, wobei $g'(\mu) = 0$ auf der zu Ψ gehörigen Menge $\mathsf{M} - \Lambda(f)$ und $g'(\mu) = f(\mu) - 1$ auf $\Lambda(f)$.] Aus der Existenz von g ergibt sich $-f_1 \in T$ (f_1 wie in § 4 definiert). Weiter erhält man $-f_1 \in T_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}}$ für alle N und alle $\mathfrak{a}_\mathsf{N}$; wegen $-f_1 \notin O_\Psi$ ist also $O_\Psi = \bigcap_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}} T_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}}$ unmöglich. b) Es sei $\Lambda(f) \notin \mathsf{P}$ für alle $f \in T$, und es sei $f \notin O_\Psi$. Dann ist die Existenz eines $T_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}}$ mit $f \notin T_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}}$, $O_\Psi \subseteqq T_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}}$ zu beweisen. Setzen wir $\Lambda^-(f) = \mathsf{N}$, so ist wegen $f \in O_\Psi$ sicher $\mathsf{N} \notin \mathsf{P}$ und man kann die Abbildung $\mathfrak{a}_\mathsf{N}$ von M auf N so wählen, daß die Bedingung des Hilfssatzes erfüllt ist. *Dadurch erreicht man, daß* $O_\Psi \subseteqq T_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}}$. Es sei nämlich $g \in O_\Psi$, $\tilde{g}_\mathsf{N}$ das kanonische Bild von g hinsichtlich $\mathfrak{H}_\mathsf{N}$. Dann ist zum Beweise von $O_\Psi \subseteqq T_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}}$ nur zu zeigen, daß $\tilde{g}_\mathsf{N}$ bei der zu $\mathfrak{a}_\mathsf{N}$ gehörigen Abbildung $\mathfrak{A}_\mathsf{N}$ das Bild eines Elementes $\bar{g}$ aus T darstellt. Nun ist aber $\Lambda^-(\tilde{g}_\mathsf{N}) = \Lambda^-(g) \cap \mathsf{N} \in \mathsf{P}$. Wegen der Festlegung von $\mathfrak{a}_\mathsf{N}$ im Sinne des Hilfssatzes ist also $\Lambda^-(\bar{g}) \in \mathsf{P}$, $\bar{g} \in O_\Psi$, $\bar{g} \in T$, wenn $\bar{g}$ durch $\bar{g}(\mu) = \tilde{g}_\mathsf{N}(\tilde{\mu})$ ($\tilde{\mu}$ Bild von μ bei der Abbildung $\mathfrak{a}_\mathsf{N}$) definiert wird. — Es bleibt noch $f \notin T_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}}$ zu beweisen. Ist g aus $T_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}}$, und haben $\tilde{g}_\mathsf{N}$, $\bar{g}$ die gleiche Bedeutung wie soeben, so ist $\Lambda(g) \cap \mathsf{N} = \Lambda(\tilde{g}_\mathsf{N})$ das Bild, das der Menge $\Lambda(g)$ durch $\mathfrak{a}_\mathsf{N}$ zugeordnet wird. Wegen $\bar{g} \in T$ ist nun nach Voraussetzung $\Lambda(\bar{g}) \notin \mathsf{P}$, und daraus folgt wegen der Grundeigenschaft von $\mathfrak{a}_\mathsf{N}$ sofort $\Lambda(\tilde{g}_\mathsf{N}) \notin \mathsf{P}$, also speziell

[17]) Ist kein $\overline{\Lambda}_i$ unendlich, so ist $I = 0$, $\Lambda_0 = \overline{\Lambda}_0 = \emptyset$ zu setzen.

$\Lambda(\tilde{g}_{\mathsf{N}}) \neq \emptyset$. Für f aber haben wir $\Lambda(\tilde{f}_{\mathsf{N}}) = \emptyset$ wegen $\Lambda^-(f) = \mathsf{N}$. Aus $g \in T_{\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}}$ ergibt sich somit $g \neq f$.

Korollar 1. Die Voraussetzung $\mathsf{P} \supseteq \mathsf{E}$ war für den Beweis von Satz 13 unentbehrlich. Denn man müßte ja aus $f \notin O_\Psi$ d.h. $\Lambda^-(f) \notin \mathsf{P}$ auf „$\Lambda^-(f)$ unendlich" und damit auf die Existenz einer Abbildung von M auf $\Lambda^-(f)$ schließen können. [Wichtig für das Verständnis der Tatsache, daß man bei O_Ψ ($\mathsf{P} \supseteq \mathsf{E}$) zu einem ganz anderen Resultat kommt als bei O.]

Korollar 2. Für $\mathsf{P} = \mathsf{E}$ hat jede Abbildung $\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}$ trivialerweise die im Hilfssatz geforderte Eigenschaft, da das Urbild einer endlichen Menge stets wieder endlich ist. Auch sonst läßt sich der Beweis vereinfachen, da für „nicht zu P gehörig" schlicht „unendlich" eingesetzt werden kann.

Korollar 3. Die Forderung, daß P eine abzählbare Basis besitzen soll, läßt sich bei Satz 13 offenbar ersetzen durch: Ist $\mathsf{N} \notin \mathsf{P}$, so existiert immer eine Abbildung $\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}$, bei der das Urbild einer zu P gehörigen Untermenge von N stets selbst zu P gehört. Es erhebt sich daher die Frage: Besitzen etwa alle E umfassenden Antifilter P die gewünschte Eigenschaft, kann also die Abzählbarkeitsvoraussetzung in Satz 13 entbehrt werden? — Wir gehen auf dieses Problem nicht näher ein; ebensowenig untersuchen wir die Modifikationen, die an unseren Überlegungen angebracht werden müssen, wenn wir die Voraussetzung der Abzählbarkeit von M fallen lassen.

Aus Satz 13 ergibt sich insbesondere:

Satz 14. *Ist der Antifilter $\mathsf{P} \supseteq \mathsf{E}$ abzählbar, so läßt sich die durch O_Ψ definierte Ordnung $\mathfrak{O}_\Psi$ stets als Konjunktion von totalen Ultrafilterordnungen $\mathfrak{T}_{\Phi_\tau}$ darstellen, die alle den gleichen Typ haben.*

Man hat nur zu beachten: Es gibt stets einen Ψ umfassenden Ultrafilter Φ. Die zu Φ gehörige T-Halbgruppe T_Φ umfaßt O_Ψ, sie enthält aber kein f mit $\Lambda^-(f) \in \Psi$. Die aus einer beliebigen Ultrafilterordnung $\mathfrak{T}_\Phi = \mathfrak{T}$ abgeleiteten Ordnungen $\mathfrak{T}_{\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}}$ sind nicht nur alle selbst Ultrafilterordnungen, sondern sie besitzen auch alle den gleichen Typ. — Bildet man weiter aus G mit Hilfe von P die Gruppe $\widetilde{G}_{\mathsf{P}} = G/G(\mathsf{P})$ mit der durch $\widetilde{O}_\Psi = O_\Psi/G(\mathsf{P})$ definierten natürlichen Ordnung $\widetilde{\mathfrak{O}}_\Psi$, so erhält man aus dem letzten Resultat über $\mathfrak{O}_\Psi$ sofort:

Satz 14*. *Hat $\mathsf{P} \supseteq \mathsf{E}$ eine abzählbare Basis, so ist die natürliche Ordnung $\mathfrak{O}_\Psi$ von $\widetilde{G}_\Psi$ stets Konjunktion von totalen Ordnungen eines festen Typs.*

(Vgl. die Herleitung des Korollars zu Satz 6 aus dem Satz 6 selbst in § 3.) — Speziell für den Fall der Gruppe $\widetilde{G}_{\mathsf{E}}$ können wir also feststellen: Es handelt sich nur noch darum, für *irgendeinen* nichttrivialen Ultrafilter Φ von G die Konstitution der zugehörigen T-Halbgruppe T_Φ bzw. Ordnung $\mathfrak{T}_\Phi$ genau zu bestimmen. Dann hat man damit für $\mathfrak{O}_{\mathsf{E}}$ und $\widetilde{\mathfrak{O}}_{\mathsf{E}}$ eine Konjunktionsdarstellung durch „bekannte" Totalordnungen gefunden. (Bei O_{E} kann ja in Satz 13 für T jede Halbgruppe T_Φ mit nichttrivialem Φ eingesetzt werden.) Wir haben also durch die Einführung der Gruppen $T_{\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}}$ bei $\widetilde{G}_{\mathsf{E}}$ eine gewisse Reduktion des Konjunktionsproblems über den in § 3 erreichten Standpunkt hinaus

erzielt: Statt auf die Menge *aller* nichttrivialen Ultrafilter kann man das Augenmerk auf einen *einzigen* (möglicherweise passend zu wählenden) Ultrafilter richten. Daß die Bedeutung der Reduktion nicht überschätzt werden darf, ist klar. Die Hauptschwierigkeit liegt nach wie vor gerade bei dem einzelnen Ultrafilter.

§ 7. Über a-Verbandsgruppen

Im folgenden werden wieder Funktionengruppen F, $\widetilde{F}_\mathfrak{p}$ und ihre natürlichen Ordnungen $\mathfrak{L}, \widetilde{\mathfrak{L}}_\mathfrak{p}$ betrachtet, aber nicht mehr totale Ordnungen gesucht. F wird als Verbandsgruppe bezeichnet, wenn zu f, g in F stets ein (notwendig bis auf Ordnungsgleichheit eindeutig bestimmtes) Element $h = \inf(f, g)$ mit den folgenden Eigenschaften existiert: 1. $f > h$, $g > h$. 2. Aus $f > h'$, $g > h'$ folgt $h > h'$. Die Verbandsgruppe F soll *a-Verbandsgruppe* heißen, wenn es auch zu jeder abzählbaren Folge $f_1, f_2, \ldots$ in F ein $h = \inf_i f_i$ mit den entsprechenden Eigenschaften wie $\inf(f, g)$ gibt, falls nur die Folge der f_i *nach unten beschränkt* ist, d. h. falls für ein passendes f durchweg $f + f_i > 0$ wird[18]). — Die Gruppe R^* aller reellen Zahlen ist eine a-Verbandsgruppe; bei jeder nach unten beschränkten Zahlenfolge μ_i ist $\inf_i \mu_i$ gleich der unteren Grenze der μ_i im üblichen Sinne. Weitere a-Verbandsgruppen sind z. B.: 1. Die Gruppen R und G von § 1 bis § 6. — 2. Die Gruppe H' aller endlichwertigen ganzzahligen, sowie die Gruppe R_b aller beschränkten, reellwertigen Funktionen. — 3. Die in Beispiel d) von § 5 betrachtete Gruppe aller Lebesguesch integrierbaren Funktionen. In allen diesen Fällen ist $f = \inf_i f_i$ bei einer nach unten beschränkten Folge f_i „in natürlicher Weise" definiert durch „$f(\mu) = \inf_i(f_i(\mu))$ für alle μ". Keine a-Verbandsgruppe ist die Gruppe H aller endlichwertigen reellen Funktionen oder die Gruppe S aller in $a \leqq \mu \leqq b$ stetigen Funktionen von Beispiel b), § 5.

Die Gruppe S soll unter der für die Bezeichnung angenehmen Annahme $a = -1$, $b = +1$ etwas näher betrachtet werden. Es gibt in S eine Folge f_i bzw. f_i', die im üblichen Sinne monoton abnehmend gegen die (nicht zu S gehörige) durch $f(\mu) = 0$ $(-1 \leqq \mu < 0)$, $f(\mu) = 1$ $(0 \leqq \mu \leqq 1)$ bzw. $f'(\mu) = 0$ $(\mu \neq 0)$, $f'(0) = 1$ definierte Funktion f bzw. f' konvergiert. Für $f_1, f_2, \ldots$ existiert $\inf_i f_i$ in S *nicht*; ist nämlich g stetig und $f_i > g$ $(i = 1, 2, \ldots)$, so gibt es immer ein stetiges $g_1 > g$ mit $f_i > g_1$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Bei $f_1', f_2', \ldots$ wird *in* S $\inf_i f_i' = 0$. Aber 0 ist *nicht* $\inf_i f_i'$ „in natürlichem Sinne". Es ändert sich also $\inf_i f_i$, wenn man S in die Obergruppe G einbaut. Anknüpfend an

[18]) Aus der Gruppeneigenschaft folgt sofort: Die Verbandsgruppe F enthält zu a, b nicht nur $\inf(a, b)$, sondern auch ein analog unter Vertauschung von $>$ und $<$ definiertes Element $\sup(a, b)$, wobei $\inf(a, b) + \sup(a, b) = a + b$. Es bildet also F tatsächlich eine Verbandsgruppe im Sinne von Lorenzen [2]. — Bei Bourbaki [1], der von „groupes réticulés" spricht, treten auch „totale" Verbandsgruppen auf, die zu jeder nach unten beschränkten Untermenge N von F stets $\inf f(f \in N)$ enthalten. Die a-Verbandsgruppen stehen gewissermaßen zwischen den Verbandsgruppen schlechthin und den totalen Verbandsgruppen. Die im Text als Beispiel 3 betrachtete a-Verbandsgruppe aller in einem Intervall $a \leqq \mu \leqq b$ beschränkten Lebesguesch meßbaren Funktionen ist *keine* totale Verbandsgruppe.

diese letzte Bemerkung wollen wir eine Funktionengruppe F eine *reguläre a-Verbandsgruppe* nennen, wenn für jede nach unten beschränkte Folge $f_1, f_2, \ldots$ aus F die *in natürlicher Weise* definierte untere Grenze $\inf_i f_i$ gleichfalls zu F gehört. — Natürlich kann man den Begriff der a-Verbandsgruppe (ebenso wie den der Verbandsgruppe) bei allen geordneten Gruppen einführen, insbesondere auch bei den Gruppen $\tilde{F}_{\mathsf{P}}$, die sich nach § 3 aus einer Funktionengruppe F ableiten lassen. — Wir gehen nun von einer regulären a-Verbandsgruppe F aus und fragen, wann eine mit Hilfe eines gegebenen Antifilters definierte Restklassengruppe $\tilde{F}_{\mathsf{P}}$ ihrerseits eine a-Verbandsgruppe ist[19]).

Satz 15. a) *Ist der Antifilter* P *a-abgeschlossen, d.h. enthält* P *mit einer Mengenfolge* $A_1, A_2, \ldots$ *immer auch* $\bigcup_n A_n$, *so ist* $\tilde{F}_{\mathsf{P}}$ *stets eine a-Verbandsgruppe.* b) *Ist* P *nicht a-abgeschlossen, so ist* $\tilde{F}_{\mathsf{P}}$ *im allgemeinen keine a-Verbandsgruppe* (*Beispiele* $F=R$, $F=G$, $F=R_b$).

Beweis. a) Es sei $\tilde{f}_0+\tilde{f}_i\in\tilde{O}_{\mathsf{P}}$ in $\tilde{F}_{\mathsf{P}}$ $(i=1, 2, \ldots)$, und es sei f_i $(i=0, 1, 2, \ldots)$ ein Repräsentant der Restklasse $\tilde{f}_i$. Dann gibt es ein $A_i\in\mathsf{P}$ für jedes $i=1, 2, \ldots$, derart daß $f_0(\mu)+f_i(\mu)\geqq 0$ für alle $\mu\in\mathsf{M}-\mathsf{N}_i$. Nach Voraussetzung ist nun $\mathsf{N}_1\cup\mathsf{N}_2\cup\cdots=\mathsf{N}\in\mathsf{P}$; für alle $\mu\in\mathsf{M}-\mathsf{N}$ wird $\inf_i(f_i(\mu))$ endlich. Definieren wir f durch $f(\mu)=\inf_i(f_i(\mu))$ $(\mu\in\mathsf{M}-\mathsf{N})$, $f(\mu)=0$ $(\mu\in\mathsf{N})$, so ist $\tilde{f}_i>\tilde{f}$ $(i=1, 2, \ldots)$ wegen $\mathsf{N}\in\mathsf{P}$. Ist ferner $\tilde{f}_i>\tilde{g}$ $(i=1, 2, \ldots)$ und g ein Repräsentant von $\tilde{g}$ sowie $A_i=A^-(f_i-g)$, $A^-(f-g)=A$, dann haben wir: $A_i\in\mathsf{P}$ $(i=1, 2, \ldots)$, $A_1\cup A_2\cup\cdots\in\mathsf{P}$, $\mathsf{N}\cup A_1\cup A_2\cup\cdots\in\mathsf{P}$, $A\subseteq A_1\cup A_2\ldots$, $A\in\mathsf{P}$, also $\tilde{f}>\tilde{g}$. — b) Wir behandeln zunächst den Fall der Gruppe R_b aller beschränkten reellwertigen Funktionen. Ist P nicht a-abgeschlossen, so gibt es, da P mit $\mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2$ immer auch $\mathsf{N}_1\cup\mathsf{N}_2$ enthält, sicher in P eine monoton zunehmende Mengenfolge $\mathsf{N}_1\subset\mathsf{N}_2\subset\cdots=\mathsf{N}$ mit $\mathsf{N}\notin\mathsf{P}$. Dann haben wir auch $A_i\notin\mathsf{P}$ für $A_i=\mathsf{N}-(\mathsf{N}_1\cup\cdots\cup\mathsf{N}_i)$. — Wir können und wollen uns nun auf solche $f\in R_b$ beschränken, bei denen $f(\mu)=0$ $(\mu\in\mathsf{M}-\mathsf{N})$; diese f werden als Funktionen auf N (statt auf M) behandelt. Es sei ε_i $(i=1, 2, \ldots)$ eine monoton zu 0 abnehmende Folge von positiven reellen Zahlen und es werde f_i durch $f_i(\mu)=0$ $(\mu\in\mathsf{N}_1\cup\cdots\cup\mathsf{N}_i)$, $f_i(\mu)=\varepsilon_i$ $(\mu\in A_i)$ definiert. Die Folge $f_1, f_2, \ldots$ ist dann nach unten beschränkt $(\inf_i f_i=0)$, und es gilt: Es ist dann und nur dann $\tilde{f}_i>\tilde{f}$ $(i=1, 2, \ldots)$, wenn es zu einem (und damit zu jedem) Repräsentanten f aus $\tilde{f}$ ein $\overline{A}(\varepsilon)\in\mathsf{P}$ gibt, derart, daß $f(\mu)\leqq\varepsilon$ $(\mu\in\mathsf{N}-\overline{A}(\varepsilon))$. — In der Tat $\tilde{f}_i>\tilde{f}$ bedeutet die Existenz eines $\overline{A}_i\in\mathsf{P}$, derart daß $f(\mu)\leqq\varepsilon_i$ $(\mu\in\mathsf{N}-\overline{A}_i)$. Wegen $\varepsilon_i\to 0$ ist also unsere Bedingung notwendig. Ist sie andererseits erfüllt, so haben wir $\tilde{f}_i>\tilde{f}$ wegen $\overline{A}(\varepsilon_i)\cap\mathsf{N}_1\cap\cdots\cap\mathsf{N}_i\in\mathsf{P}$ $(i=1, 2, \ldots)$. — Es sei nun $\tilde{f}_i>\tilde{f}$ $(i=1, 2, \ldots)$, f ein Repräsentant der Klasse $\tilde{f}$, und es sei g definiert durch $g(\mu)=f(\mu)+\varepsilon_1$ $(\mu\in\mathsf{N}_1)$, $g(\mu)=f(\mu)+\varepsilon_{i+1}$ $(\mu\in\mathsf{N}_{i+1}-\mathsf{N}_i)$

[19]) Den Ausgangspunkt für die Aufstellung von Satz 15 bildete die Bemerkung, daß $\tilde{G}_{\mathsf{E}}$ *keine* a-Verbandsgruppe ist. Zu ihr wiederum wurde ich durch BOURBAKI [1] § 1 geführt, wo in Aufgabe 34 gewisse „pathologische" Eigenschaften der Gruppe $\tilde{G}_{\mathsf{E}}$ festgestellt werden, die im übrigen aus dem Rahmen unserer Betrachtungen fallen.

$(i=1, 2, \ldots)$. Dann ist nach unserem Kriterium $\tilde{f}_i > \tilde{g}$ $(i=1, 2, \ldots)$. Andererseits ist *nicht* $f > \tilde{g}$, da $g(\mu) > f(\mu)$ auf ganz N und $\mathsf{N} \notin \mathsf{P}$. — Das soeben konstruierte Beispiel ist natürlich wegen $R > R_b$ auch für die Gruppe R brauchbar. Für G muß man eine etwas andere Konstruktion machen. N_i, N, Λ_i sollen die gleiche Bedeutung haben wie bisher, dagegen werde diesmal f_i durch $f_n(\mu) = -n$ $(\mu \in \mathsf{N})$ erklärt. Dann ist die Folge $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots$ (im Gegensatz zu der Folge $f_1, f_2, \ldots$) nach unten beschränkt; denn man hat $\tilde{f}_0 + \tilde{f}_i \in \tilde{O}_\mathsf{P}$, falls $\tilde{f}_0$ durch $f_0(\mu) = 1$ $(\mu \in \mathsf{N}_1)$, $f_0(\mu) = i+1$ $(\mu \in \mathsf{N}_{i+1} - \mathsf{N}_i)$ definiert wird. Es sei jetzt $\tilde{f}_i > \tilde{f}$ $(i=1, 2, \ldots)$ und f ein Repräsentant von $\tilde{f}$. Dann gehört $\overline{\Lambda}_i = \Lambda$ $(f \geqq 1-i)$ wegen $\tilde{f}_i > \tilde{f}$ zu P. Bedeutet nun $g(\mu)$ die durch $g(\mu) = f(\mu) + 1$ $(\mu \in \mathsf{N})$ festgelegte Funktion, so ist $\tilde{f} - \tilde{g} \in \tilde{O}_\mathsf{P}$ wegen $\mathsf{N} \notin \mathsf{P}$. Andererseits hat man $\tilde{f}_i > \tilde{g}$ wegen $\Lambda(g \geqq 1-i) = \overline{\Lambda}_i \in \mathsf{P}$.

Aus Satz 15 a) ergibt sich insbesondere die (letzten Endes wohlbekannte) Tatsache, daß die in Beispiel c), § 5 betrachtete Gruppe $\tilde{F}_\mathsf{P} = \tilde{F}$ eine a-Verbandsgruppe ist. Daß man in Satz 15 b) nicht einfach behaupten kann: „Ist P nicht a-abgeschlossen, so ist $\tilde{F}_\mathsf{P}$ niemals eine a-Verbandsgruppe", zeigt das Beispiel der Gruppe H' aller ganzzahligen, beschränkten und damit endlichwertigen Funktionen. Denn bei ihr wird H'_P *immer* eine a-Verbandsgruppe bei beliebiger Wahl des Antifilters P. Die Frage ob noch weitere reguläre a-Verbandsgruppen F existieren, bei denen zum mindesten für gewisse nicht a-abgeschlossene Antifilter P auch $\tilde{F}_\mathsf{P}$ eine a-Verbandsgruppe darstellt, soll hier offengelassen werden.

§ 8. Eine Bemerkung über freie Moduln

Die folgenden Betrachtungen hängen mit § 1 bis § 7 nur dadurch zusammen, daß wieder Funktionen — allerdings diesmal Funktionenmoduln an Stelle von Funktionengruppen —, untersucht werden, und daß beim Beweis an entscheidender Stelle eine Abzählbarkeitsüberlegung, ähnlich wie in § 4, auftritt.

Es sei I ein beliebiger, echter Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper K $(I \neq K!)$. Wie früher sei M eine beliebige, unendliche Argumentmenge; M sei die Menge aller überall auf M definierten eindeutigen Funktionen, mit Werten aus I, und zwar werde M als *I-Modul* aufgefaßt. Im Sinne von Bourbaki ist $M = I^\mathsf{M}$.) Ein beliebiger I-Modul N möge wie üblich *frei* heißen, wenn in N eine Menge von über K linear unabhängigen Elementen g_τ existiert, derart daß jedes $f \in N$ in einem aus endlich vielen Elementen $g_{\tau_1}, \ldots, g_{\tau_n}$ erzeugten I-Modul $\{g_{\tau_1}, \ldots, g_{\tau_n}\}$ enthalten ist. Das Ziel von § 8 ist der Beweis von

Satz 16. *Ist I ein beliebiger echter Integritätsbereich und M unendlich, so ist der Modul $M = I^\mathsf{M}$ nie frei*[20]).

[20]) In Bourbaki [2] § 3, Aufgabe 10 wird ein Beweis von Satz 16 für den Fall skizziert, daß I ein Hauptidealring mit unendlich vielen verschiedenen Primelementen ist. Die

Wir definieren zunächst: I möge *a-höhenendlich* für ein $a \in I$ genannt werden, wenn für jedes $b \neq 0$ in I ein n existiert, derart daß $b \cdot a^{-n} \in I$. Andererseits soll ein $f \in N$ *a-höhenendlich* heißen oder *a-höhenendlich in N* je nachdem ob die Gleichungen $a^n \cdot x = f$ $(n = 1, 2, \ldots)$ für alle n in M lösbar sind oder nicht. Es gilt dann jedenfalls: *Ist I a-höhenendlich, so ist in einem freien Modul N jedes* $f \neq 0$ *a-höhenendlich.* Ist nämlich $f = \sum_{i=1,\ldots,n} a_i \cdot g_{\tau_i}$, so ist wegen der linearen Unabhängigkeit der g_{τ_i} über K sicher $\sum_{i=1,\ldots,n} (a^{-n} \cdot a_i)\, g_{\tau_i}$ die einzige Lösung der Gleichung $a^n \cdot x = f$, und es gehört diese Lösung dann und nur dann zu N, wenn $a^{-n} \cdot a_i \in I$ $(i = 1, \ldots, n)$. — Wir beweisen Satz 16 zunächst unter der Voraussetzung, daß ein $a \neq 0$ in I existiert, so daß I a-höhenendlich.

Es seien $\mu_1, \mu_2, \ldots$ abzählbar unendlich viele Elemente von M, und es sei M_0 die Vereinigungsmenge aller μ_i. Ferner werde f_i definiert durch: $f_i(\mu_i) = 1$, $f_i(\mu) = 0$ $(\mu \neq \mu_i)$, und es bedeute M_0 den Modul aller der f, die den folgenden Bedingungen genügen: 1. $f(\mu) = 0$ $(\mu \in \mathsf{M} - \mathsf{M}_0)$. 2. Zu jeder ganzen positiven Zahl n gibt es ein $\mathsf{N}(f; n)$ derart, daß $f(\mu_i)$ für alle $i > \mathsf{N}(f; n)$ in I durch a^n teilbar ist. Man sieht nun sofort: Ist N ein Untermodul von M, der $f_1, f_2, \ldots$ enthält, so ist in dem Restklassenmodul M/N jede durch ein $f \in M_0$ erzeugte Restklasse $\tilde{f}$ a-höhenunendlich. [Beachte: $f - f(\mu) \cdot f_1 - \cdots - f(\mu_{\mathsf{N}}) \cdot f_{\mathsf{N}} = a^n \cdot h$ $(h \in M)$ für $\mathsf{N} = \mathsf{N}(f; n)$ $a^n \cdot \tilde{h} = \tilde{f}$ in M/N.] — Ist andererseits M frei, so kann man abzählbar unendlich viele Basiselemente $g_{\tau_1}, \ldots$ von M so bestimmen, daß der durch die g_{τ_i} erzeugte Modul $N = \{g_{\tau_1}, g_{\tau_2}, \ldots\}$ alle f_i enthält. Der Modul M/N ist frei; eine Basis für $M/N = \tilde{M}$ bildet die Menge aller Restklassen $\tilde{g}_\tau$ $(g_\tau \neq g_{\tau_i}$ $(i = 1, 2, \ldots))$. Es ist also wie schon oben gezeigt in M/N jedes $\tilde{f} \neq \tilde{o}$ a-höhenendlich. Für jedes $f \in M_0$ muß daher $\tilde{f} = \tilde{o}$ sein, d.h. wir haben $M_0 \subseteq N$. Um die Annahme „M frei" zu widerlegen, genügt es somit zu zeigen: *Es gibt stets ein nicht zu* $N = \{g_{\tau_0}, g_{\tau_n}, \ldots\}$ *gehöriges* $f \in M_0$. Da aber jedes $f \in N$ bereits in einem endlichen Modul $N_n = \{g_{\tau_1}, \ldots, g_{\tau_n}\}$ liegt, ergibt sich die Existenz eines f der von uns gewünschten Art durch einen trivialen Induktionsschluß aus der folgenden Bemerkung: Sind n und N beliebig vorgegeben, so kann man die Funktionswerte $(i = \mathsf{N} + 1, \ldots, \mathsf{N} + n)$ so festlegen, daß $f(\mu_i) = a^n \cdot b_i$ $(b_i \in I)$, und daß das Gleichungssystem $\sum_{k=1,\ldots,n-1} g_{\tau_k}(\mu_i) = f(\mu_i)$ in I unlösbar ist. Die Richtigkeit der „Bemerkung" aber ist fast trivial. Man beachte: Da es sich um n Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten handelt, gibt es jedenfalls Elemente b_i $(i = \mathsf{N} + 1, \ldots, \mathsf{N} + n)$ in I, derart daß unser Gleichungssystem sogar im Quotientenkörper K von I unlösbar für $f(\mu_i) = b_i$; dann aber ist unser System auch unlösbar für $f(\mu_i) = a^n \cdot b_i$.

Einführung der Unendlichkeitsbedingung — die darauf hinweist, daß die Überflüssigkeit dieser Forderung nicht bekannt war — ist vor allem deshalb überraschend, weil die im Aufgabenteil von BOURBAKI [2] § 2 eingeführten Begriffsbildungen ohne weiteres ausreichen, um Satz 16 für beliebige Hauptidealringe (nach der in unserem Text benutzten Methode) sehr rasch und elementar abzuleiten.

In der Mehrzahl der praktisch wichtigen Integritätsbereiche I gibt es Elemente $a \neq 0$, für die I a-höhenendlich; z.B. kann in einem Integritätsbereich mit Maximalbedingung für a jede von 0 verschiedene Nichteinheit gewählt werden. Ein Beispiel für ein I, das hinsichtlich keines $a \neq 0$ höhenendlich, liefert ein Bewertungsring, in dessen Wertgruppe zu jedem Wert β im Sinne von § 4 ein Wert $\gamma \gg \beta$ existiert. Es sei jetzt I ein beliebiger Integritätsbereich von diesem für uns ungünstigen Typus, $a \neq 0$ irgendeine Nichteinheit aus I; die Moduln M_0 und $N = \{g_{\tau_1}, g_{\tau_2}, \ldots\}$ seien genau so definiert wie in dem bereits erledigten einfachen Fall. Dann kann aus der Tatsache, daß $M/N = \tilde{M}$ ein freier Modul mit den $\tilde{g}_\sigma$ $(g_\sigma \neq g_{\tau_i})$; $(i = 1, 2, \ldots)$ als Basiselementen ist, diesmal nur geschlossen werden: Für jedes $f \in M_0$ muß eine Gleichung $f = \sum_{i=1,\ldots,n} a_i \cdot g_{\tau_i} + \sum_{k=1,\ldots,m} b_k \cdot g_{\sigma_k}$ gelten, bei der alle b_k a-höhenunendlich sind. Aus $g_{\sigma_k} \in M$ und der Tatsache, daß die a-höhenunendlichen Elemente in I ein Ideal bilden, folgert man weiter: Bei $g = f - \sum_{i=1,\ldots,n} a_i \cdot g_\tau$ ist $g(\mu)$ a-höhenunendlich für alle μ. Wir haben also diesmal ein $f \in M_0$ zu konstruieren, derart daß g bei beliebig großem n und beliebiger Wahl der a_i dieser Bedingung *nicht* genügt. Dazu brauchen wir den folgenden

Hilfssatz. *Zu jeder Nichteinheit $a \neq 0$ aus I gibt es ein a nicht enthaltendes Primideal $\mathfrak{p}$, derart daß alle $b \notin \mathfrak{p}$ a-höhenendlich sind.*

Nehmen wir den Beweis, der später nachgetragen werden soll, als bereits geführt an, so können wir ganz analog schließen wie im einfachen Fall, mit dem einen Unterschied, daß diesmal gezeigt werden muß: Bei passender Wahl der $c_i \in I$ kann für kein System $x_1, \ldots, x_{n-1}$ aus I jemals

$$\sum_{k=1,\ldots,n-1} x_k \cdot g_{\tau_k}(\mu) - a^n \cdot c_i \in \mathfrak{p} \qquad (i = \mathsf{N}+1, \ldots, \mathsf{N}+n)$$

werden. Diese Behauptung ist aber wieder sehr leicht zu beweisen: Ist $\overline{K}$ der Quotientenkörper des Restklassenrings $\overline{I} = I/\mathfrak{p}$ und bedeutet $\bar{c}$ die jeweils durch $c \in I$ repräsentierte Restklasse aus $\overline{I}$, so wähle man c_i $(i = \mathsf{N}+1, \ldots, \mathsf{N}+n)$ so, daß das Gleichungssystem $\sum_{k=1,\ldots,1-1} x_k \cdot \overline{g_{\tau_k}(\mu)}\, \bar{c}_i$ in $\overline{K}$ unlösbar wird.

Nun zum Beweis des Hilfssatzes[21])! Es sei $\mathfrak{p}_0$ ein minimales Primoberideal des Hauptideals $(a) \cdot I$. Im Ring $\overline{I}$ aller Quotienten $b \cdot c^{-1}$ $(b, c \in I,\ c \in \mathfrak{p}_0)$ ist $\tilde{\mathfrak{p}}_0 = \mathfrak{p}_0 \cdot \tilde{I}$ das einzige maximale Primideal und $(a) \cdot \tilde{I}$ ein zu $\tilde{\mathfrak{p}}_0$ gehöriges Primärideal. Es kann daher kein Primideal $\tilde{\mathfrak{p}} \neq \tilde{\mathfrak{p}}_0$ aus I das Element a enthalten und daraus folgt sofort: Ist $\tilde{\mathfrak{p}}$ ein (sicher vorhandenes) Primideal aus $\tilde{I}$, das a nicht enthält und zu dem es kein echtes Primoberideal mit der gleichen Eigenschaft gibt, so ist $\tilde{\mathfrak{p}}$ ein unmittelbares Primunterideal von $\tilde{\mathfrak{p}}_0$. Setzen wir daher $\overline{I} = \tilde{I}/\tilde{\mathfrak{p}}$, und bezeichnen wir allgemein mit $\bar{b}$ die durch $b \in \tilde{I}$ repräsentierte Restklasse aus $\overline{I}$, so wird $\overline{I}$ ein primärer Integritätsbereich mit dem einzigen vom Nullideal verschiedenen Primideal $\bar{\mathfrak{p}}_0 = \tilde{\mathfrak{p}}_0/\tilde{\mathfrak{p}}$, und es ist daher $(\bar{b}) \cdot \overline{I}$ entweder gleich $\overline{I}$ oder ein zu $\bar{\mathfrak{p}}_0$ gehöriges Primärideal für jedes $b \in \tilde{\mathfrak{p}}$

[21]) Zu den im folgenden idealtheoretischen Überlegungen vgl. Krull [2].

aus $\tilde{I}$. Daher folgt weiter: $\bar{I}$ *ist* $\bar{a}$*-höhenendlich*, denn für $\bar{b} \neq \bar{O}$ haben wir nach bereits Bewiesenem: $\bar{a}^{n-1} \in (\bar{b}) \cdot \bar{I}$ d. h. $\bar{a}^{n-1} = \bar{b} \cdot \bar{c}$ $(\bar{c} \in \bar{I})$ für hinreichend großes n. Daraus ergibt sich weiter: $\bar{b} \cdot \bar{a}^{-n} = (\bar{c} \cdot \bar{a})^{-1} \notin \bar{I}$ wegen $\bar{c} \cdot \bar{a} \in \bar{\mathfrak{p}}_0$. — Wir setzen nun $\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}} \cap I$ und beachten: Ist für $b \in I$ etwa $b \cdot a^{-n} \in I$, d. h. $b = a^n \cdot c$ $(c \in I)$, so haben wir auch $\bar{b} = \bar{a}^n \cdot \bar{c}$, $\bar{b} \cdot \bar{a}^{-n} \in \bar{I}$. Ist daher $b \in I$ a-höhenunendlich, so ist auch $\bar{b} \in \bar{I}$ a-höhenunendlich und wir erhalten $\bar{b} = \bar{O}$ $b \in \tilde{\mathfrak{p}} \cap I = \mathfrak{p}$. Das Primideal $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}} \cap I$ genügt also der Bedingung des Hilfssatzes.

Literatur

Bourbaki: [*1*] Algèbre; Groupes et corps ordonnés, Chap. VI. Paris 1952. — [*2*] Algèbre; Modules sur les anneaux principaux, Chap. VII. Paris 1952. — [*3*] Topologie générale I. Paris 1951.

Lorenzen: [*1*] Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie. Math. Z. **45**, 533—553 (1939). — [*2*] Über halbgeordnete Gruppen. Math. Z. **52**, 483—526 (1950).

Birkhoff: [*1*] Lattice Theory, Chap. 10. New York 1948.

Krull: [*1*] Allgemeine Bewertungstheorie. J. reine angew. Math. **167**, 160—196 (1932). — [*2*] Idealtheorie ohne Endlichkeitsbedingung. Math. Ann. **101** (1929), insbesondere S. 737 unten.

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 31. März 1955)

Zusatz bei der Korrektur. Herr Jürgen Schmidt machte mich darauf aufmerksam, daß die Vermutung, es seien bei abzählbaren M alle nichttrivialen Ultrafilter äquivalent, durch eine einfache „Abzählung" widerlegt werden kann. (Die Menge aller nichttrivialen Ultrafilter ist von größerer Mächtigkeit als die Menge aller Permutationen von M.) — Unsere Untersuchungen über abzählbare Filter können also die voreilige Äquivalenzvermutung nicht stützen. Sie behalten aber insofern ihren Wert als sie zeigen, daß man bei jeder Unterscheidung von Klassen nichtäquivalenter Ultrafilter notwendig über das Abzählbare hinausgehen muß. Die Bedeutung der Aufgabe, mindestens einen nichttrivialen Ultrafilter im Sinne des Schlusses von § 2 explizit darzustellen, tritt so besonders klar hervor. Wegen der Schwierigkeit dieses Problems wird man sich zu seiner Behandlung allerdings nach neuen Methoden umsehen müssen. Hier sei folgender Hinweis gestattet: Vielleicht ist der richtige Ausgangspunkt der konstruktive Aufbau der Analysis, der von P. Lorenzen geschaffen und neuerdings (in der gelben Sammlung) auch lehrbuchmäßig dargestellt wurde. Allerdings scheint es auf den ersten Blick, als ob man so nur zu Paradoxien kommen könne. Denn bei dem „schichtweisen" Aufbau der Analysis im Sinne Lorenzens kommt man in *keiner* Schicht über das Abzählbare hinaus. Man könnte also meinen, es müßten notwendig alle nichttrivialen Ultrafilter äquivalent werden. Indessen hat Lorenzen schon in anderen Fällen gezeigt, daß die gefürchteten Schwierigkeiten nicht eintreten. So gibt es bei ihm durchaus Mengen positiven Lebesgueschen Maßes — trotz des bekannten klassischen Satzes, daß alle abzählbaren Mengen das Maß Null haben. Auch ist in seinem Rahmen eine Theorie höherer Mächtigkeiten möglich, wie bisher unveröffentlichte Untersuchungen von E. Wette zeigen. Die „Überabzählbarkeitsprobleme" der Ultrafiltertheorie dürften also den Methoden Lorenzens durchaus zugänglich sein und gerade von der Beseitigung der scheinbaren Paradoxien darf man wertvolle neue Erkenntnisse erwarten.

Hsiung, Ch.-Ch.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 41—46 (1956)

A theorem on surfaces with a closed boundary

By
Chuan-Chih Hsiung

§ 1. Introduction

The purpose of this paper is to prove the following

Theorem. *Let S and S^* be two orientable surfaces of class C''' in a three-dimensional Euclidean space E^3 with positive Gaussian curvatures and closed boundaries C and C^* respectively. Suppose that there is a one-to-one correspondence between the points of the two surfaces S and S^* such that at corresponding points the two surfaces S and S^* have the same normal vectors and equal sums of the principal radii of curvature, and such that at corresponding points the two boundaries C and C^* have the same tangent vectors and equal linear elements. Then the two surfaces S and S^* are congruent or symmetric.*

For two closed surfaces S and S^*, this theorem is due to E. B. Christoffel [1] and was reproved by A. Hurwitz [2] by using spherical harmonics. A generalization of this theorem to hypersurfaces of an arbitrary dimension $n(>1)$ will be studied on a later occasion.

§ 2. Preliminaries

In a three-dimensional Euclidean space E^3, let us consider a fixed orthogonal frame $0\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_2\,\mathfrak{y}_3$ with a point 0 as the origin. Let i_1, i_2, i_3 be the unit vectors from the origin 0 in the directions of the vectors $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3$, and let A_α^j $(j=1, 2, 3)$ be the components of a vector A_α $(\alpha=1, 2)$[1]) with respect to the frame $0\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_2\,\mathfrak{y}_3$, then the scalar product and the vector product of the two vectors A_1 and A_2 are respectively defined in the usual way as follows:

$$A_1 \cdot A_2 = \sum_i A_1^i A_2^i, \tag{2.1}$$

$$A_1 \times A_2 = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \end{vmatrix}. \tag{2.2}$$

Now we consider a surface S of class C''' in the space E^3. Let (x^1, x^2, x^3) be the coordinates of a point P in E^3 with respect to the orthogonal frame

[1]) Throughout this paper all Latin indices take the values 1, 2, 3 and Greek indices the values 1, 2 unless stated otherwise. We shall also follow the convention that repeated indices imply summation.

$0\ \mathfrak{y}_1\ \mathfrak{y}_2\ \mathfrak{y}_3$, then the surface S can be given by the parametric equations

$$x^i = f^i(u^1, u^2), \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{2.3}$$

or the vector equation

$$X = F(u^1, u^2), \tag{2.4}$$

where x^i and f^i are respectively the components of the two vectors X and F, the two parameters u^1 and u^2 take values in a simply connected domain D of the two-dimensional real number space, $f^i(u^1, u^2)$ are of the third class and the Jacobian matrix $\|\partial x^i/\partial u^\alpha\|$ is of rank two at all points of D. If we denote the vector $\partial X/\partial u^\alpha$ by X_α for $\alpha = 1, 2$, then the first fundamental form of the surface S at a point P is

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta, \tag{2.5}$$

where

$$g_{\alpha\beta} = X_\alpha \cdot X_\beta, \tag{2.6}$$

and the matrix $\|g_{\alpha\beta}\|$ is positive definite so that the determinant

$$g = |g_{\alpha\beta}| > 0. \tag{2.7}$$

Let N be the unit normal vector of the surface S at a point P, and N_α the vector $\partial N/\partial u^\alpha$, then

$$N_\alpha = -\, b_{\alpha\beta}\, g^{\beta\gamma}\, X_\gamma, \tag{2.8}$$

where

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = -\, X_\alpha \cdot N_\beta \tag{2.9}$$

are the coefficients of the second fundamental form of the surface S at the point P, and $g^{\beta\gamma}$ denotes the cofactor of $g_{\beta\gamma}$ in g divided by g so that

$$g^{\alpha\beta}\, g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma, \tag{2.10}$$

δ^α_γ being the KRONECKER deltas. The two principal curvatures k_1 and k_2 of the surface S at the point P are the roots of the determinant equation

$$|b_{\alpha\beta} - k\, g_{\alpha\beta}| = 0, \tag{2.11}$$

from which we obtain the Gaussian curvature K and mean curvature H of the surface S at the point P:

$$K = b/g, \qquad H = \tfrac{1}{2}\, b_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta}, \tag{2.12}$$

where $b = |b_{\alpha\beta}|$.

The third fundamental form of the surface S at the point P is

$$dN \cdot dN = f_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta, \tag{2.13}$$

where we have placed

$$f_{\alpha\beta} = N_\alpha \cdot N_\beta. \tag{2.14}$$

From equations (2.6), (2.8) and (2.10), it follows immediately that

$$f_{\alpha\beta} = b_{\alpha\varrho}\, b_{\beta\sigma}\, g^{\varrho\sigma}, \tag{2.15}$$

and therefore that

$$g^{\alpha\beta} = f_{\varrho\sigma}\, b^{\alpha\varrho}\, b^{\beta\sigma}, \tag{2.16}$$

where $b^{\alpha\varrho}$ denotes the cofactor of $b_{\alpha\varrho}$ in b divided by b. It is easily seen that the two principal radii of curvature $r_1 = 1/k_1$ and $r_2 = 1/k_2$ of the surface S at the point P are the roots of the determinant equation

$$|b_{\alpha\beta} - r f_{\alpha\beta}| = 0, \tag{2.17}$$

from which we obtain

$$r_1 r_2 = b/f, \quad r_1 + r_2 = b_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta}, \tag{2.18}$$

where $f^{\alpha\beta}$ denotes the cofactor of $f_{\alpha\beta}$ in the determinant $f = |f_{\alpha\beta}|$ divided by f. From equations (2.12) and (2.18) it follows immediately that

$$f = K^2 g > 0. \tag{2.19}$$

The area element of the surface S at the point P is given by

$$dA = g^{1/2}\, du^1\, du^2. \tag{2.20}$$

Now we choose the direction of the unit normal vector N in such a way that the frame PX_1X_2N is a right-handed system. Then from equations (2.2) and (2.20) it follows that

$$g^{1/2} N = X_1 \times X_2, \tag{2.21}$$

$$|X_1, X_2, N| = g^{1/2}. \tag{2.22}$$

§ 3. An integral formula

Suppose that there is a one-to-one correspondence between the points of two surfaces S and S^* of class C''' with positive Gaussian curvatures and closed boundaries C and C^* respectively in a space E^3 such that the two surfaces S and S^* have the same normal vectors at corresponding points. Without loss of generality we may assume that the corresponding points of the two surfaces S and S^* have the same local coordinates u^1 and u^2. Then § 2 can be applied to the surface S, and for the corresponding quantities for the surface S^* we shall use the same symbols with a star.

At first, we observe that the vector $N \times X_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) is perpendicular to the normal vector N and that the two vectors N_1 and N_2 are linearly independent in the tangent plane of the surface S at the point P. Therefore $N \times X_\alpha$ can be written in the form

$$N \times X_\alpha = a^{\alpha\beta} N_\beta. \tag{3.1}$$

Taking the scalar products of the both sides of equation (3.1) with the vector X_γ and making use of equations (2.9), (2.12), (2.18) and (2.22), we can easily determine $a^{\alpha\beta}$ and thus obtain

$$N\times X_\alpha = \frac{1}{\sqrt{f}}(b_{2\alpha}N_1 - b_{1\alpha}N_2), \qquad (\alpha = 1, 2). \tag{3.2}$$

By means of equations (2.8), (2.12) and (2.21), it is easily seen that

$$\frac{\partial}{\partial u^2}(N\times X_1) - \frac{\partial}{\partial u^1}(N\times X_2) = N_2\times X_1 - N_1\times X_2 = 2H\sqrt{g}\,N. \tag{3.3}$$

Thus, from equations (3.2) and (3.3),

$$2H\sqrt{g}\,N = \sum_{\substack{\beta=1\\(\beta\neq\alpha)}}^{2}(-1)^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{b_{2\beta}}{\sqrt{f}}N_1 - \frac{b_{1\beta}}{\sqrt{f}}N_2\right). \tag{3.4}$$

Taking the scalar products of the both sides of equation (3.4) with the position vector X^* of the surface S^*, we obtain in consequence of the analogue of equation (2.9) for the surface S^*

$$\left\{\begin{aligned} 2H\sqrt{g}\,p^* = \sum_{\substack{\beta=1\\(\beta\neq\alpha)}}^{2}(-1)^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{b_{2\beta}}{\sqrt{f}}X^*\cdot N_1 - \frac{b_{1\beta}}{\sqrt{f}}X^*\cdot N_2\right) - \\ - \frac{1}{\sqrt{f}}(b_{11}b^*_{22} - 2b_{12}b^*_{21} + b_{22}b^*_{11}), \end{aligned}\right. \tag{3.5}$$

where we have placed

$$p^* = X^*\cdot N. \tag{3.6}$$

Integrating equation (3.5) with respect to u^1 and u^2 over the surface S and applying the GREEN's theorem to the first term on the right side of equation (3.5), we then have

$$\left\{\begin{aligned} \iint_S 2H\sqrt{g}\,p^*\,du^1\,du^2 = \int_C \frac{1}{\sqrt{f}}(b_{1\alpha}X^*\cdot N_2 - b_{2\alpha}X^*\cdot N_1)\,du^\alpha - \\ - \iint_S \frac{1}{\sqrt{f}}(b_{11}b^*_{22} - 2b_{12}b^*_{21} + b_{22}b^*_{11})\,du^1\,du^2. \end{aligned}\right. \tag{3.7}$$

§ 4. Proof of the theorem

Let t be the unit tangent vector of the boundary C at a point P, and n the unit tangent vector of the surface S at the point P such that t, n and N form a right-handed system. Then we obtain, by means of equations (3.2),

$$\left\{\begin{aligned} t &= X_\alpha\frac{du^\alpha}{ds}, \\ n &= -t\times N = \frac{1}{\sqrt{f}}(b_{2\alpha}N_1 - b_{1\alpha}N_2)\frac{du^\alpha}{ds}, \end{aligned}\right. \tag{4.1}$$

and therefore equation (3.7) reduces to

$$\text{(4.2)} \qquad \begin{cases} \iint\limits_S 2H\sqrt{g}\,p^*\,du^1\,du^2 + \int\limits_C X^*\cdot n\,ds \\ \qquad = -\iint\limits_S \frac{1}{\sqrt{f}}\,(b_{11}\,b^*_{22} - 2b_{12}\,b^*_{21} + b_{22}\,b^*_{11})\,du^1\,du^2. \end{cases}$$

Replacing the surface S by the surface S^* in equation (4.2) gives

$$\text{(4.3)} \qquad \begin{cases} \iint\limits_S 2H^*\sqrt{g^*}\,p^*\,du^1\,du^2 + \int\limits_{C^*} X^*\cdot n^*\,ds^* \\ \qquad = -2\iint\limits_S \frac{1}{\sqrt{f}}\,(b^*_{11}\,b^*_{22} - b^*_{12}\,b^*_{21})\,du^1\,du^2. \end{cases}$$

It is easily seen that by the assumptions of the theorem the integrals on the left side of the two equations (4.2) and (4.3) are respectively equal. Thus subtracting equation (4.3) from equation (4.2) yields

$$\text{(4.4)} \qquad \iint\limits_S \frac{1}{\sqrt{f}}\,[2(b^*_{11}\,b^*_{22} - b^*_{12}\,b^*_{21}) - (b_{11}\,b^*_{22} - 2b_{12}\,b^*_{21} + b_{22}\,b^*_{11})]\,du^1\,du^2 = 0.$$

By interchanging the two surfaces S and S^* we obtain immediately, from equation (4.4),

$$\text{(4.5)} \qquad \iint\limits_S \frac{1}{\sqrt{f}}\,(b_{11}\,b_{22} - b_{12}\,b_{21})\,du^1\,du^2 = \iint\limits_S \frac{1}{\sqrt{f}}\,(b^*_{11}\,b^*_{22} - b^*_{12}\,b^*_{21})\,du^1\,du^2.$$

Thus the addition of equations (4.4) and (4.5) gives

$$\text{(4.6)} \qquad \iint\limits_S \frac{1}{f}\,[(b_{11} - b^*_{11})\,(b_{22} - b^*_{22}) - (b_{12} - b^*_{12})^2]\,\sqrt{f}\,du^1\,du^2 = 0.$$

Now for simplicity, we may assume that the parameters u^1 and u^2 are so chosen that $f_{\alpha\beta} = 0$ for $\alpha \neq \beta$. Then from the assumption of the theorem that the sums of the principal radii of curvature of the two surfaces S and S^* at corresponding points are equal, we obtain, by use of the second equation of (2.18) and the analogous one for the surface S^*,

$$(b_{11} - b^*_{11})\,f_{22} + (b_{22} - b^*_{22})\,f_{11} = 0.$$

Since f_{11} and f_{22} are positive, $b_{11} - b^*_{11}$ and $b_{22} - b^*_{22}$ are of opposite sign or are both zero. Thus the integrand of equation (4.6) is non-positive, and therefore equation (4.6) holds when and only when

$$(b_{11} - b^*_{11})\,(b_{22} - b^*_{22}) - (b_{12} - b^*_{12})^2 = 0,$$

which implies that

$$b_{\alpha\beta} = b^*_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2). \tag{4.7}$$

From equations (4.7), (2.10), (2.16) and the analogous ones for the surface S^* we obtain that $g_{\alpha\beta} = g^*_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$. Hence the proof of the theorem is complete.

References

[1] CHRISTOFFEL, E. B.: Über die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch lokale Messungen auf derselben. J. reine u. angew. Math. **64**, 193—209 (1865). — [2] HURWITZ, A.: Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier. Ann. École Norm. (3) **19**, 357—408 (1902).

Lehigh University, Bethlehem, Pa., U.S.A.

(Eingegangen am 21. März 1955)

Lamprecht, E.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 47—71 (1956)

Zetafunktionen symmetrisch-erzeugbarer algebraischer Funktionenkörper mehrerer Veränderlicher

Von
Erich Lamprecht

Einleitung und allgemeine Vorbemerkungen

Ein kommutativer Körper, der über seinem Primkörper durch Adjunktion endlich vieler algebraischer oder transzendenter Elemente entsteht, d.h. endlich erzeugbar ist[1]), ist entweder ein *algebraischer Funktionenkörper von n Veränderlichen* (n = Transzendenzgrad) über einem *endlich-algebraischen Zahlkörper* [Fall (a), Bezeichnung: $K, A, \ldots$] oder über einem *Galoisfeld* [Fall (e), Bezeichnung: $K, A, \ldots$]. Einem solchen Körper A bzw. A können in Fortführung von Ansätzen von Hasse [3b] und A. Weil [9b], [9d] Zetafunktionen zugeordnet werden; hierzu zunächst einige Vorbemerkungen:

Die Erzeugung von A bzw. A. Der *Konstantenkörper* $\varkappa$ von A bzw. k von A, d.h. die Gesamtheit der über dem Primkörper algebraischen Elemente von A bzw. A, ist eindeutig durch den Körper A bzw. A bestimmt und in ihm algebraisch abgeschlossen. Seien mit

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{0.1}$$

n algebraisch unabhängige Elemente aus A bzw. A in *fester Numerierung* vorgegeben (n = Transzendenzgrad über dem Konstantenkörper), so wird durch die Festsetzung:

$$\text{(0.2)} \quad \begin{cases} \text{Setze } \varkappa = A_0 \text{ (bzw. } k = A_0) \text{ und für } \nu = 1, \ldots, n \text{ jeweils} \\ A_\nu = \text{Gesamtheit der über } A_{\nu-1}(x_\nu) \text{ algebraischen Elemente aus } A \\ (A_\nu = \text{Gesamtheit der über } A_{\nu-1}(x_\nu) \text{ algebraischen Elemente aus } A) \end{cases}$$

eine Erzeugung von A bzw. A als Turm algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen

$$\text{(0.3)} \quad \varkappa = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = A \quad \text{bzw.} \quad k = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = A$$

in Abhängigkeit von $x_1, \ldots, x_n$ eindeutig bestimmt; hierbei ist jeweils A_ν bzw. A_ν algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen mit dem genauen Konstantenkörper $A_{\nu-1}$ bzw. $A_{\nu-1}$.

Die einer Erzeugung zugeordneten Bewertungs-n-tupel. Eine diskrete 1-rangige (additiv geschriebene) Bewertung $w_{\mathfrak{p}_\nu}$ eines Teilkörpers A_ν bzw. A_ν aus

[1]) In der Bezeichnungsweise von Kähler ein „rein algebraischer Körper"; vgl. [5a], [5b] (eckige Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis).

(0.3) — der zugehörige Primdivisor sei $\mathfrak{p}_\nu$ — kann eindeutig als Funktionalbewertung bezüglich $x_{\nu+1}, \ldots, x_n$ auf $A_\nu(x_{\nu+1}, \ldots, x_n)$ bzw. $A_\nu(x_{\nu+1}, \ldots, x_n)$ fortgesetzt werden (vgl. HASSE [3d], S. 133ff.) und es gibt höchstens endlich viele inäquivalente Fortsetzungen dieser Funktionalbewertung auf A bzw. A (die zugehörigen Primdivisoren seien mit $\mathfrak{P}'_\nu$ bezeichnet). Jeder Restklassenkörper $A_{\nu+\varrho}\mathfrak{P}'_\nu$ bzw. $A_{\nu+\varrho}\mathfrak{P}'_\nu$ [2]) $(1 \leqq \varrho \leqq n-\nu)$ ist vom Transzendenzgrad ϱ über $A_\nu\mathfrak{p}_\nu$ bzw. $A_\nu\mathfrak{p}_\nu$, allerdings braucht $A_\nu\mathfrak{p}_\nu$ bzw. $A_\nu\mathfrak{p}_\nu$ nicht mehr der genaue Konstantenkörper zu sein. Dieses Verfahren kann man mit dem neu erhaltenen Körper $A\mathfrak{P}'_\nu$ bzw. $A\mathfrak{P}'_\nu$ wiederum durchführen.

Geht man im Fall (e) von den sämtlichen Bewertungen von A_1 entsprechenden Primdivisoren $\mathfrak{P}'_1$ (i.b.a. $x_2, \ldots, x_n$) aus, wendet in jedem Restklassenkörper $A\mathfrak{P}'_1$ auf alle inäquivalenten Bewertungen von $A_2\mathfrak{P}'_1$ das gleiche Konstruktionsprinzip an und erhält so Primdivisoren $\mathfrak{P}'_{1,2}$ von $A\mathfrak{P}'_1$ und Restklassenkörper $A\mathfrak{P}'_1\mathfrak{P}'_{1,2}$, und setzt man dieses Verfahren sukzessive fort, so erhält man durch $x_1, \ldots, x_n$ eindeutig bestimmte Divisor-n-tupel

$$(\mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}'_{1,2}, \ldots, \mathfrak{P}'_{1,\ldots,n}); \tag{0.4e}$$

jedes solche n-tupel bestimmt eindeutig eine n-rangige diskrete Bewertung von A und verschiedene n-tupel bestimmen verschiedene Bewertungen [3]). Dies ermöglicht zunächst im Fall (e) auf arithmetischem Wege eine Zetafunktion $Z_A(s; x_1, \ldots, x_n)$ von A bezüglich $x_1, \ldots, x_n$ zu definieren.

Definition 1(e). *Die* arithmetische Zetafunktion $Z_A(s; x_1, \ldots, x_n)$ *des algebraischen Funktionenkörpers A von $n \geqq 0$ Veränderlichen über dem Galoisfeld k bezüglich $x_1, \ldots, x_n$ wird durch die folgende rekursive Festsetzung gegeben:*

$$\begin{cases} Z_A(s; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod\limits_{\mathfrak{P}'_1} Z_{A\mathfrak{P}'_1}(s; x_2\mathfrak{P}'_1, \ldots, x_n\mathfrak{P}'_1), \\ \mathfrak{P}'_1 \textit{ alle Fortsetzungen bezüglich } x_2, \ldots, x_n \textit{ auf } A \textit{ der Gesamtheit der} \\ \textit{Bewertungen von } A_1; \end{cases} \tag{0.5}$$

dieses Verfahren ist für die Zetafunktionen auf der rechten Seite von (0.5) *so lange zu wiederholen, bis hier Zetafunktionen des Transzendenzgrades* 0 *auftreten; wenn $n(A\mathfrak{P}'_1 \cdots \mathfrak{P}'_{1,\ldots,n}) = 0$, ist die Abschließungsbedingung*

$$\begin{cases} Z_{A\mathfrak{P}'_1 \cdots \mathfrak{P}'_{1,\ldots,n}}(s) = \dfrac{1}{1 - \mathfrak{N}(A\mathfrak{P}'_1 \cdots \mathfrak{P}'_{1,\ldots,n})^{-s}} \\ \mathfrak{N}(A\mathfrak{P}'_1 \cdots \mathfrak{P}'_{1,\ldots,n}) = \textit{Elementanzahl von } A\mathfrak{P}'_1 \cdots \mathfrak{P}'_{1,\ldots,n} \end{cases} \tag{0.6}$$

einzusetzen.

Im Fall (a) geht man von der Gesamtheit der nichtäquivalenten Bewertungen von $\varkappa = A_0$ aus (die zugehörigen Primdivisoren seien mit dem Index 0 bezeichnet), wiederholt das oben angegebene Verfahren [nach dem ersten

[2]) Mit $A\mathfrak{P}'_\nu$ bzw. $A\mathfrak{P}'_\nu$ bezeichnen wir den Restklassenkörper A mod $\mathfrak{P}'_\nu$ bzw. A mod $\mathfrak{P}'_\nu$, entsprechend für $\mathfrak{P}'_\nu$-ganzes x mit $x\mathfrak{P}'_\nu$ die Restklasse von x mod $\mathfrak{P}'_\nu$.

[3]) Vgl. etwa W. KRULL [6a], S. 113ff.; die zugehörigen Bewertungsringe sind nämlich jeweils verschieden.

Schritt ist man bereits beim Fall (e)] und erhält so durch $x_1, \ldots, x_n$ eindeutig bestimmte Divisor-$(n+1)$-tupel

$$(\mathfrak{P}'_0, \mathfrak{P}'_{0,1}, \ldots, \mathfrak{P}'_{0,1,\ldots,n}) \tag{0.4a}$$

mit entsprechenden Eigenschaften wie oben. Die Definition der Zetafunktion im Fall (a) kann, wie folgt, auf den Fall (e) zurückgeführt werden.

Definition 1(a). *Die* unvollständige[4]) arithmetische Zetafunktion $Z_A^*(s; x_1, \ldots, x_n)$ *des algebraischen Funktionenkörpers* A *von* $n \geqq 0$ *Veränderlichen über dem endlich-algebraischen Zahlkörper* $\varkappa = A_0$ *bezüglich* $x_1, \ldots, x_n$ *wird durch die folgende rekursive Festsetzung gegeben:*

$$Z_A^*(s; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{\mathfrak{P}'_0} Z_{A\mathfrak{P}'_0}(s; x_1\mathfrak{P}'_0, \ldots, x_n\mathfrak{P}'_0), \tag{0.7}$$

wobei $\mathfrak{P}'_0$ *alle Fortsetzungen bezüglich* $x_1, \ldots, x_n$ *auf* A *der Gesamtheit der nichtarchimedischen Bewertungen von* $\varkappa = A_0$ *durchläuft und jedes* $Z_{A\mathfrak{P}'_0}(s; x_1\mathfrak{P}'_0, \ldots, x_n\mathfrak{P}'_0)$ *gemäß Definition* 1 (e) *erklärt ist.*

Die arithmetischen Zetafunktionen können als n-faches bzw. $(n+1)$-faches unendliches Produkt[5]) über n-rangige bzw. $(n+1)$-rangige diskrete Bewertungen des Funktionenkörpers geschrieben werden.

Es interessieren nun unter anderem die folgenden Fragen: a) In welchem Bereich der s-Ebene konvergieren die Produktdarstellungen der Zetafunktionen[6])? — b) Existieren Darstellungen durch elementarere Funktionen und wie lassen sie sich analytisch fortsetzen? — c) Wie lautet ihre Funktionalgleichung (Beziehungen zum Riemann-Rochschen Satz)? — d) Aussagen über Nullstellen und Pole (Riemannsche Vermutung). — e) Verhalten bei Konstantenerweiterung (nur für $n \geqq 1$). — f) Abhängigkeit von der Erzeugung von A bzw. A, d.h. von der Auswahl von $x_1, \ldots, x_n$ (Invarianzproblem).

Für endlich-algebraische Zahlkörper und algebraische Funktionenkörper einer Veränderlichen über einem Galoisfeld sind diese Fragen in bekanntem Umfang gelöst; insbesondere sind hier die Zetafunktionen Invarianten des Körpers. Für arithmetische Funktionenkörper A, d.h. $n=1$ und $\varkappa = A_0$ endlich-algebraischer Zahlkörper, wurden von A. Weil [9c, d], H. Hasse [3b] und M. Deuring [2b] in einfachen Spezialfällen die Fragen a), b), c) und teilweise auch d) gelöst[7]).

[4]) Für die archimedischen Bewertungen von $\varkappa$ sind noch keine Beiträge erklärt; eine Hinzunahme solcher Beiträge ist in mancher Hinsicht zweckmäßig (vgl. § 3). Die Definition ist eine direkte Weiterführung der Hasseschen bei $n=1$ (vgl. [3b]).

[5]) Es werden jedoch nicht alle n-rangigen bzw. $(n+1)$-rangigen diskreten Bewertungen des Körpers erfaßt. Die Produktdefinition entspricht der der Artinschen L-Funktionen, für die auch eine Schreibweise als Dirichlet-Reihe nicht bekannt ist.

[6]) Für die Stufe 2, d.h. Fall (a) mit $n=1$ oder Fall (e) mit $n=2$, konvergiert das Produkt für $\Re(s) > 2$, wie aus Ergebnissen von Deuring [2a] folgt.

[7]) Einer mündlichen Mitteilung von Herrn Prof. Dr. F. K. Schmidt zufolge fand inzwischen M. Eichler entsprechende Ergebnisse für weitere spezielle Typen arithmetischer Funktionenkörper.

In dieser Note werden die obengenannten Fragen für arithmetische Zetafunktionen weiterer Körpertypen untersucht, so z.B. in § 1 — nach Herleitung eines Kompositionssatzes für Zetafunktionen — für symmetrisch-erzeugbare Funktionenkörper von n Veränderlichen über einem Galoisfeld k, d.h. für Körper, die als unabhängiges Kompositum von n Funktionenkörpern einer Veränderlichen über k darstellbar sind. Mit „geometrischen" Zetafunktionen höherer Kongruenzmannigfaltigkeiten, wie sie von A. WEIL [9b] in Verallgemeinerung eines Ansatzes bei algebraischen Kurven eingeführt wurden, beschäftigen wir uns in § 2; über die WEILschen Spezialfälle hinaus werden hier weitere Fälle gelöst und die Beziehungen zu den arithmetischen Zetafunktionen der zugehörigen Funktionenkörper untersucht. — § 3 enthält Beiträge zum Fall (a) mit $n>1$, Vergleiche dieser Ergebnisse mit denen in § 1, Relationen zwischen Zetafunktionen von Relativkörpern sowie Beziehungen zu Größencharakteren und WEILschen Charakterfunktionen. Ergänzende Bemerkungen, Beispiele und Überlegungen zum Invarianzproblem der Zetafunktionen sind in § 4 enthalten.

§ 1. Arithmetische Zetafunktionen in symmetrisch-erzeugbaren algebraischen Funktionenkörpern von n Veränderlichen über einem Galoisfeld

1.1. *Ergebnisse bei Funktionenkörpern einer Veränderlichen*[8]). Es seien k das Galoisfeld von $q=p^f$ Elementen und K_i $(i=1,\ldots,n)$ n algebraische Funktionenkörper einer Veränderlichen vom Geschlecht g_i mit dem genauen Konstantenkörper k. Die gemäß Definition 1(e) erklärten arithmetischen Zetafunktionen von K_i sind unabhängig von der Erzeugung und besitzen die Reihendarstellungen

$$(1.1)\qquad Z_{K_i}(s)=\prod_{\mathfrak{p}_i}\left(1-\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p}_i)^s}\right)^{-1}=\sum_{\mathfrak{a}_i}\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_i)^s}\qquad(\mathfrak{N}=\text{Absolutnorm in } K_i);$$

hierbei läuft das Produkt über alle Primdivisoren $\mathfrak{p}_i$ von K_i und die Summe über alle ganzen Divisoren $\mathfrak{a}_i$ von K_i. Summen- bzw. Produktdarstellung konvergieren für $\Re(s)>1$ absolut gegen die folgenden rationalen Funktionen von q^{-s}, die auch jeweils die analytischen Fortsetzungen der durch (1.1) im Konvergenzbereich erklärten Funktionen sind:

$$(1.2)\qquad \begin{cases} Z_{K_i}(s)=\dfrac{\left(1-\frac{\alpha_{i,1}}{q^s}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha_{i,2g_i}}{q^s}\right)}{\left(1-\frac{1}{q^s}\right)\left(1-\frac{q}{q^s}\right)}=Z_{\mathrm{rat}}(s)\,L_i(s) \\ \text{mit}\quad Z_{\mathrm{rat}}(s)=\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{q^s}\right)\left(1-\frac{q}{q^s}\right)}\quad\text{und}\quad L_i(s)=\prod_{\lambda_i=1}^{2g_i}\left(1-\frac{\alpha_{i,\lambda_i}}{q^s}\right). \end{cases}$$

$Z_{\mathrm{rat}}(s)$ ist die Zetafunktion des rationalen Funktionenkörpers $k(x)$; die α_{i,λ_i} $(\lambda_i=1,\ldots,2g_i)$ sind komplexe (sogar ganzalgebraische) Zahlen vom

[8]) Vgl. etwa F. K. SCHMIDT [8] und H. HASSE [3a].

Absolutbetrag $|\alpha_{i,\lambda_i}| = \sqrt{q}$ [9]). Das Reziproke der $Z_{K_i}(s)$ kann in der Form

$$(1.3)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{Z_{K_i}(s)} = \displaystyle\prod_{\lambda_i=0}^{2g_i+1} \left(1 - \frac{\alpha_{i,\lambda_i}}{q^s}\right)^{a_{i,\lambda_i}} \text{ mit } \alpha_{i,0}=1,\ \alpha_{i,2g_i+1}=q,\ a_{i,0}=a_{i,2g_i+1}=1, \\ \alpha_{i,\lambda_i} \text{ gemäß (1.2) und } a_{i,\lambda_i}=-1 \text{ für } \lambda_i=1,\ldots,2g_i, \end{cases}$$

geschrieben werden[10]). Beim Übergang von s zu $1-s$ genügen diese Zetafunktionen den Funktionalgleichungen

$$(1.4)\qquad \frac{Z_{K_i}(s)}{Z_{K_i}(1-s)} = \frac{q^{s\,2(1-g_i)}}{q^{(1-g_i)}}.$$

Ist $k^{(r)}$ das Galoisfeld von q^r Elementen und $K_i^{(r)} = k^{(r)} \cdot K_i$ die zugehörige Konstantenerweiterung von K_i, so ist die Zetafunktion von $K_i^{(r)}$ gemäß

$$(1.5)\qquad Z_{K_i^{(r)}}(s) = \prod_{\varrho \bmod r} Z_{K_i}\left(s - \frac{\varrho}{r}\frac{2\pi i}{\log q}\right) = \frac{\left(1-\frac{\alpha_{i,1}^r}{q^{rs}}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha_{i,2g_i}^r}{q^{rs}}\right)}{\left(1-\frac{1}{q^{rs}}\right)\left(1-\frac{q^r}{q^{rs}}\right)}$$

durch die von K_i bestimmt.

Bei der Substitution $z = q^{-s}$ ist $\zeta_{K_i}(z) = Z_{K_i}(s)$ eine rationale Funktion von z und für die logarithmische Ableitung von $\zeta_{K_i}(z)$ gilt

$$(1.6)\qquad \frac{d\log\zeta_{K_i}(z)}{d\log z} = \sum_{r=1}^{\infty} N_i^{(r)} z^r,$$

wobei $N_i^{(r)}$ die Anzahl der Primdivisoren 1. Grades von $K_i^{(r)}$ ist; ist C_i eine singularitätenfreie ebene algebraische Kurve über k mit dem Funktionenkörper K_i, so ist $N_i^{(r)}$ gleichzeitig die Anzahl der algebraischen Punkte von C_i in $k^{(r)}$.

1.2. *Der Kompositionssatz der arithmetischen Zetafunktionen.* Als Grundlage zu den weiteren Untersuchungen leiten wir ein Schema her, das in vielen Fällen gestattet, Aussagen über die Zetafunktionen höherer algebraischer Funktionenkörper auf solche in niederen Körpern zurückzuführen.

Satz 1. *Ist der algebraische Funktionenkörper A von $n = n_1 + n_2$ Veränderlichen über dem Galoisfeld k von q Elementen darstellbar als unabhängiges Kompositum $A = B_1 \cdot B_2$ zweier Teilkörper B_1 bzw. B_2 von n_1 bzw. n_2 Veränderlichen*[11]*, konvergiert für $i = 1, 2$ bei der speziellen Erzeugung $x_{i1}, \ldots, x_{in_i}$ von B_i die Produktdarstellung der gemäß Definition 1 (c) erklärten Zetafunktion*

[9]) Dies besagt die Riemannsche Vermutung; Beweise siehe bei A. Weil [9a] und P. Roquette [7a, b].

[10]) Für $\Re(s) > 1$ ist jeweils auch $\dfrac{1}{Z_{K_i}(s)} = \displaystyle\prod_{\mathfrak{p}_i}\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p}_i)^s}\right)$ absolut konvergent.

[11]) B_1 und B_2 sind wieder algebraische Funktionenkörper mit dem genauen Konstantenkörper k.

$Z_{B_i}(s; x_{i1}, \ldots, x_{in_i})$ *falls* $\Re(s) > n_i$ *gegen eine rationale Funktion in* q^s *der Form*

$$(1.7)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{Z_{B_i}(s; x_{i1}, \ldots, x_{in_i})} = \prod\limits_{\lambda_i=1}^{l_i} \left(1 - \dfrac{\beta_{i\lambda_i}}{q^s}\right)^{b_{i\lambda_i}} \\ \text{mit } b_{i\lambda_i} = \pm 1 \quad \text{und} \quad |\beta_{i\lambda_i}| \leq q^{n_i} \ (\text{für } i = 1,2) \end{cases}$$

und ist bei Konstantenerweiterung von k *zu* $k^{(r)}$, *d.h. für* $B_i^{(r)}$

$$(1.8)\qquad \frac{1}{Z_{B_i^{(r)}}(s; x_{i1}, \ldots, x_{in_i})} = \prod_{\lambda_i=1}^{l_i} \left(1 - \frac{\beta_{i\lambda_i}^r}{q^{rs}}\right)^{b_{i\lambda_i}},$$

so konvergiert die Produktdarstellung der arithmetischen Zetafunktion

$$Z_A(s; x_{11}, \ldots, x_{1n_1}, x_{21}, \ldots, x_{2n_2})$$

absolut für $\Re(s) > n_1 + n_2 = n$ *und es ist*

$$(1.9)\qquad \frac{1}{Z_A(s; x_{11}, \ldots, x_{2n_2})} = \prod_{\lambda_1=1}^{l_1} \prod_{\lambda_2=1}^{l_2} \left(1 - \frac{\beta_{1\lambda_1}\beta_{2\lambda_2}}{q^s}\right)^{b_{1\lambda_1}b_{2\lambda_2}}$$

und bei Konstantenerweiterung von k *zu* $k^{(r)}$ *ist für* $A^{(r)} = B_1^{(r)} \cdot B_2^{(r)}$

$$(1.10)\qquad \frac{1}{Z_{A^{(r)}}(s; x_{11}, \ldots, x_{2n_2})} = \prod_{\lambda_1=1}^{l_1} \prod_{\lambda_2=1}^{l_2} \left(1 - \frac{\beta_{1\lambda_1}^r \beta_{2\lambda_2}^r}{q^{rs}}\right)^{b_{1\lambda_1}b_{2\lambda_2}}.$$

Genügen die Zetafunktionen von B_i *den Funktionalgleichungen*

$$(1.11)\qquad \frac{Z_{B_i}(s; x_{i1}, \ldots, x_{in_i})}{Z_{B_i}(n_i - s; x_{i1}, \ldots, x_{in_i})} = \frac{q^{sh_i}}{H_i} \qquad (H_i, h_i \text{ konstante Zahlen}),$$

so gilt mit geeigneten Zahlen H *und* h *eine entsprechende Gleichung*

$$(1.12)\qquad \frac{Z_A(s; x_{11}, \ldots, x_{2n_2})}{Z_A(n_1 + n_2 - s; x_{11}, \ldots, x_{2n_2})} = \frac{q^{sh}}{H},$$

und ist speziell sogar

$$(1.13\,a)\qquad h_i = \sum_{\lambda_i=1}^{l_i} b_{i\lambda_i}, \qquad H_i = q^{\frac{n_i}{2}h_i} \qquad (i = 1, 2),$$

so folgt

$$(1.13\,b)\qquad h = h_1 h_2 = \sum_{\lambda_1=1}^{l_1} \sum_{\lambda_2=1}^{l_2} b_{1\lambda_1} b_{2\lambda_2}, \qquad H = (-1)^h q^{\frac{n_1+n_2}{2}h}.$$

Beweis. Führt man mit der Erzeugung $x_{11}, \ldots, x_{1n_1}, x_{21}, \ldots, x_{2n_2}$ die ersten n_1 Schritte zur Konstruktion der Bewertungs-n-tupel durch, so kann man bei dem Fortsetzungsprozeß jeweils zunächst B_2 (bzw. den zu B_2 isomorphen Restklassenbereich) adjungieren, da die Elemente aus B_2 von den x_{1i} nicht abhängen. Diese Adjunktion von B_2 ist jeweils eine Konstantenerweiterung mit einem separabel-erzeugbaren Körper, dessen Elemente über

dem Konstantenkörper transzendent sind. Nach CHEVALLEY[12]) tritt dabei weder Zerlegung noch Verzweigung auf und es wird

$$A\,\mathfrak{P}_1'\,\mathfrak{P}_{1,2}'\cdots\mathfrak{P}_{1,\ldots,\nu}' = B_1\,\mathfrak{P}_1'\,\mathfrak{P}_{1,2}'\cdots\mathfrak{P}_{1,\ldots,\nu}'\cdot B_2, \qquad (\nu \leq n_1), \tag{1.14}$$

wobei das Kompositum über dem jeweiligen Konstantenkörper gebildet wird. Somit entsteht $Z_A(s; x_{11}, \ldots, x_{2n_2})$ formal aus $Z_{B_1}(x_{11}, \ldots, x_{1n_1})$, indem man in der letzteren Funktion jeweils

$$\frac{1}{1-\mathfrak{N}(B_1\mathfrak{P}_1'\cdots\mathfrak{P}_{1,\ldots,m_1}')^{-s}} = \frac{1}{1-q^{-rs}} \quad (r = \text{Grad von } B_1\mathfrak{P}_1'\cdots\mathfrak{P}_{1,\ldots,n_1}' \text{ über } k)$$

ersetzt durch

$$\left\{\begin{aligned} Z_A\mathfrak{P}_1'\cdots\mathfrak{P}_{1,\ldots,n_1}'(s; x_{22}, \ldots, x_{2n_2}) &= Z_{B_2^{(r)}}(s; x_{22}, \ldots, x_{2n_2}) \\ &= \prod_{\lambda_2=1}^{l_2}\left(1-\frac{\beta_{2\lambda_2}^r}{q^{rs}}\right)^{b_{2\lambda_2}} = \prod_{\lambda_2=1}^{l_2}\left[1-\mathfrak{N}(B_1\mathfrak{P}_1'\cdots\mathfrak{P}_{1,\ldots,n_1}')^{\gamma_{2\lambda_2}-s}\right]^{b_{2\lambda_2}}, \end{aligned}\right. \tag{1.15}$$

wobei

$$\beta_{i\lambda_i} = q^{\gamma_{i\lambda_i}} \quad (i=1,2;\ \lambda_i = 1, \ldots, l_i)\ ^{13}). \tag{1.16}$$

Ordnet man nach der Ersetzung (1.15) in der Produktdarstellung nach den Indizes λ_2 um und multipliziert zunächst jeweils über die Faktoren mit dem Index λ_2, so wird

$$Z_A(s; x_{11}, \ldots, x_{2n_2}) = \prod_{\lambda_2=1}^{l_2} Z_{B_1}(s-\gamma_{2\lambda_2}; x_{11}, \ldots, x_{1n_1})^{b_{2\lambda_2}}; \tag{1.17}$$

setzt man hierin wieder $q^{\gamma_{2\lambda_2}} = \beta_{2\lambda_2}$, so folgt daraus die Formel (1.9). Da die Produktdarstellung von $Z_{B_1}(s; x_{11}, \ldots, x_{1n_1})$ für $\Re(s) > n_1$ absolut konvergiert, ferner $\Re(\gamma_{2\lambda_2}) \leq n_2$ ist, konvergiert jedes der obigen Produkte für

$$Z_{B_1}(s-\gamma_{2\lambda_2}; x_{11}, \ldots, x_{1n_1})$$

absolut, falls $\Re(s) > n_1 + n_2$, und somit wird der Wert des unendlichen Produktes durch die oben vorgenommene Umordnung der Faktoren nicht geändert; da weiter für $\Re(s) > n_1 + n_2$ die Ersetzung (1.15) erlaubt ist, konvergiert die Produktdarstellung von $Z_A(s; x_{11}, \ldots, x_{2n_2})$ in dieser Halbebene gegen die durch (1.9) beschriebene Funktion.

Wegen $A^{(r)} = B_1^{(r)} \cdot B_2^{(r)}$ folgt (1.10), wenn man von den entsprechenden Zetafunktionen von $B_1^{(r)}$ und $B_2^{(r)}$ ausgeht.

Bei der Herleitung der Funktionalgleichung lassen wir zur Vereinfachung der Schreibweise die Argumente $x_{i\lambda_i}$ fort. Ausgehend von (1.17) und (1.11) erhalten wir (jeweils mit den Argumenten $s-\gamma_{2\lambda_2}$)

$$Z_A(s) = \prod_{\lambda_2=1}^{l_2} Z_{B_1}(n_1 - s + \gamma_{2\lambda_2})^{b_{2\lambda_2}} \cdot R_1 \quad \text{mit} \quad R_1 = \prod_{\lambda_2=1}^{l_2}\left(\frac{q^{(s-\gamma_{2\lambda_2})h_1}}{H_1}\right)^{b_{2\lambda_2}}.$$

---

[12]) Vgl. [1], Kap. V, insbes. S. 92ff.

[13]) Beachte $q^{\gamma_{i\lambda_i}+2\pi i n \log q} = \beta_{i\lambda_i}$; die $\gamma_{i\lambda_i}$ können durch die Vorschrift, daß sie minimalen positiven Imaginärteil haben sollen, eindeutig normiert werden.

Wegen (1.7) und (1.16) ist

$$\prod_{\lambda_2=1}^{l_2} Z_{B_1}(n_1-s+\gamma_{2\lambda_2})^{b_{2\lambda_2}} = \prod_{\lambda_2=1}^{l_2}\prod_{\lambda_1=1}^{l_1}\left(1-\frac{\beta_{1\lambda_1}q^s}{\beta_{2\lambda_2}q^{n_1}}\right)^{-b_{1\lambda_1}b_{2\lambda_2}}$$

$$= R_2\prod_{\lambda_1=1}^{l_1} Z_{B_2}(s-n_1+\gamma_{1\lambda_1})^{b_{1\lambda_1}} \quad \text{mit} \quad R_2 = \prod_{\lambda_1=1}^{l_1}\prod_{\lambda_2=1}^{l_2}\left(-\frac{\beta_{1\lambda_1}q^s}{\beta_{2\lambda_2}q^{n_1}}\right)^{-b_{1\lambda_1}b_{2\lambda_2}}.$$

Abermals wegen (1.11) ist (jeweils mit den Argumentwerten $s-n_1+\gamma_{1\lambda_1}$)

$$\prod_{\lambda_1=1}^{l_1} Z_{B_2}(s-n_1+\gamma_{1\lambda_1})^{b_{1\lambda_1}} = R_3\prod_{\lambda_1=1}^{l_1} Z_{B_3}(n_1+n_2-s-\gamma_{1\lambda_1})^{b_{1\lambda_1}}$$

$$\text{mit} \quad R_3 = \prod_{\lambda_1=1}^{l_1}\left(\frac{q^{(s-n_1+\gamma_{1\lambda_1})h_2}}{H_2}\right)^{b_{1\lambda_1}}.$$

Da die (1.17) entsprechende Formel bei Vertauschung der Indizes $i=1$ und 2 wegen (1.9) ebenfalls gilt, wird

$$Z_A(s) = Z_A(n_1+n_2-s)\cdot R_1R_2R_3,$$

und da $R_1R_2R_3$ von der Form q^{sh}/H ist, ist dies gleichbedeutend mit (1.12). — Setzen wir (1.13a) voraus, so folgt

$$R_1R_2R_3 = \prod_{\lambda_2=1}^{l_2}\left(\frac{q^{sh_1}}{H_1\beta_{2\lambda_2}^{h_1}}\right)^{b_{2\lambda_2}}\prod_{\lambda_1=1}^{l_1}\prod_{\lambda_2=1}^{l_2}\left(-\frac{\beta_{2\lambda_2}q^{n_1}}{\beta_{1\lambda_1}q^s}\right)^{b_{1\lambda_1}b_{2\lambda_2}}\prod_{\lambda_1=1}^{l_1}\left(\frac{q^{sh_2}\beta_{1\lambda_1}^{h_2}}{q^{n_1h_2}H_2}\right)^{b_{1\lambda_1}}$$

$$= \frac{q^{sh_1h_2}}{H_1^{h_2}}\cdot\frac{q^{n_1h_1h_2}}{q^{sh_1h_2}}\cdot\frac{q^{sh_1h_2}}{q^{n_1h_1h_2}H_2^{h_1}}(-1)^{h_1h_2} = \frac{q^{sh}}{H}, \qquad h, H \text{ gemäß (1.13b)},$$

womit Satz 1 vollständig bewiesen ist.

Bemerkungen. Die Symmetrie des Ergebnisses von Satz 1 zeigt, daß der Wert dieser Zetafunktion von A invariant ist bei Vertauschung der Rollen von B_1 und B_2, wenn man an den Erzeugungen $x_{i1}, \ldots, x_{in_i}$ der B_i festhält. — Weiter ist stets $|\beta_{1\lambda_1}\beta_{2\lambda_2}| \leqq q^{n_1+n_2}$. Somit übertragen sich alle für die Zetafunktionen der B_i vorausgesetzten Eigenschaften auf die von A.

1.3. *Symmetrisch-erzeugbare Funktionenkörper von n Veränderlichen.* Ein algebraischer Funktionenkörper A von n Veränderlichen über k heiße *symmetrisch-erzeugbar*, wenn er in der Form

$$A = K_1^*\cdot K_2^*\cdots K_n^* \tag{1.18}$$

als unabhängiges Kompositum von n Funktionenkörpern K_i^* einer Veränderlichen über k darstellbar ist. A besitzt dann eine Erzeugung $x_1, \ldots, x_n$ [14]) mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß jeweils A_i aus $A_{i-1}(x_i)$ schon durch Adjunktion über $k(x_i)$ algebraischer Elemente ξ_i erzeugt wird. Durch Adjunktion dieser ξ_i zu $k(x_i)$ entsteht der zu K_i^* isomorphe Teilkörper K_i von A, dessen Eigenschaften gemäß **1.** festgelegt seien. — Die Voraussetzungen

[14]) Vgl. (0.2) und (0.3).

von Satz 1 einschließlich (1.13a) sind für die Zetafunktionen dieser Körper K_i erfüllt; somit lassen sich diese Eigenschaften der Zetafunktion induktiv auf $A \cong K_1 \cdots K_n$ übertragen und wir erhalten

Korollar 1 zu Satz 1. *Ist durch $x_1, \ldots, x_n$ eine symmetrische Erzeugung des algebraischen Funktionenkörpers $A \sim K_1 \cdots K_n$ von n Veränderlichen über k gegeben, so konvergiert die Produktdarstellung von $Z_A(s; x_1, \ldots, x_n)$ für $\Re(s) > n$ absolut gegen die durch*

$$(1.19)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{Z_A(s; x_1, \ldots, x_n)} = \prod_{\lambda_1=0}^{2g_1+1} \cdots \prod_{\lambda_n=0}^{2g_n+1} \left(1 - \dfrac{\alpha_{1\lambda_1} \cdots \alpha_{n\lambda_n}}{q^s}\right)^{a_{1\lambda_1} \cdots a_{n\lambda_n}}, \\ \text{wobei die } \alpha_{i\lambda_i} \text{ und } a_{i\lambda_i} \ (\lambda_i = 0, \ldots, 2g_i+1;\ i = 1, \ldots, n) \text{ gemäß (1.2), (1.3) bestimmt sind,} \end{array} \right.$$

beschriebene rationale Funktion in q^{-s}; weiter ist

$$(1.20)\quad \frac{1}{Z_{A^{(r)}}(s; x_1, \ldots, x_n)} = \prod_{\lambda_1=0}^{2g_1+1} \cdots \prod_{\lambda_n=0}^{2g_n+1} \left(1 - \frac{\alpha_{1\lambda_1}^r \cdots \alpha_{n\lambda_n}^r}{q^{rs}}\right)^{a_{1\lambda_1} \cdots a_{n\lambda_n}},$$

und es gilt die Funktionalgleichung

$$(1.21)\quad \frac{Z_A(s; x_1, \ldots, x_n)}{Z_A(n-s; x_1, \ldots, x_n)} = \frac{q^{s\,2^n(1-g_1)\cdots(1-g_n)}}{q^{\frac{n}{2}\,2^n(1-g_1)\cdots(1-g_n)}}.$$

Wegen der Symmetrie des Ergebnisses (1.19) und der Invarianz der Zetafunktion jedes Teilkörpers K_i können wir überdies folgende Teilaussagen des Invarianzproblems folgern:

Korollar 2 zu Satz 1. *Die Zetafunktion $Z_A(s; x_1, \ldots, x_n)$ des symmetrisch erzeugten Funktionenkörpers $A \cong K_1 \cdots K_n$ ist einerseits invariant bei jeder Permutation der x_i, d.h. unabhängig von der Reihenfolge bei der Kompositumsbildung, und andererseits invariant bei Ersetzung der x_i durch andere über k transzendente Elemente y_i aus den K_i.*

Die Pole und Nullstellen von $Z_A(s; x_1, \ldots, x_n)$ sind gemäß (1.19) eindeutig durch die der $Z_{K_i}(s)$ bestimmt und somit überträgt sich eine der Riemannschen Vermutung entsprechende Aussage auch auf $Z_A(s; x_1, \ldots, x_n)$, d.h. diese Zetafunktion hat Pole für $\Re(s) = 0, 1, \ldots, n$ und kann Nullstellen höchstens für $\Re(s) = 1/2, 3/2, \ldots, n-1+1/2$ haben. Die folgende elementare Umformung von (1.9) gibt noch einen besseren Einblick in die Verteilung von Polen und Nullstellen. Bezeichne

$$(1.22)\quad L_{i_1, \ldots, i_k}(s) = L_{i_1}(s) \times \cdots \times L_{i_k}(s) = \prod_{\lambda_{i_1}=1}^{2g_{i_1}} \cdots \prod_{\lambda_{i_k}=1}^{2g_{i_k}} \left(1 - \frac{\alpha_{i_1\lambda_{i_1}} \cdots \alpha_{i_k\lambda_{i_k}}}{q^s}\right)$$[15])

[15]) Die Verknüpfung dieser Polynome in q^{-s} entspricht der der charakteristischen Polynome eines Kroneckerprodukts von Matrizen. — Die Komposition der reziproken Zetafunktionen in Satz 1 ist eine Modifikation dieses Schemas für rationale Funktionen.

und für $m \geqq 0$

$$\text{(1.23)} \qquad \begin{cases} L^{[m]}_{i_1, \ldots, i_k}(s) = \prod_{\mu=0}^{m} \left[L_{i_1, \ldots, i_k}(s-\mu)\right]^{\binom{m}{\mu}}, \\ Z^{[m]}_{\mathrm{rat}}(s) = \prod_{\mu=0}^{m} \left[Z_{\mathrm{rat}}(s-\mu)\right]^{\binom{m}{\mu}}, \end{cases}$$

wobei mit $\binom{m}{\mu}$ die Binomialkoeffizienten bezeichnet sind, so ist

$$\text{(1.24)} \qquad Z_A(s; x_1, \ldots, x_n) = Z^{[n-1]}_{\mathrm{rat}}(s) \prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \leq n} \left[L^{[n-k]}_{i_1, \ldots, i_k}(s)\right]^{(-1)^k + 1} \right).$$

Im Spezialfall des *rationalen Funktionenkörpers* $R = k(x_1, \ldots, x_n)$ *von* n *Veränderlichen* wird

$$\text{(1.25)} \qquad Z_R(s; x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{q^k}{q^s}\right)^{\binom{n}{k}}}.$$

Korollar 3 zu Satz 1. *Ist A bezüglich $x_1, \ldots, x_n$ symmetrisch-erzeugbar, so hat $Z_A(s; x_1, \ldots, x_n)$ sicher für $s = k + 2m\pi i \cdot \log q$ $(k = 0, \ldots, n;\ m$ ganz$)$ Pole der Ordnung $\binom{n}{k}$, also ist $\Re(s) = n$ die genaue Konvergenzabszisse der Produktdarstellung. Falls mindestens zwei $g_i \neq 0$, kommen weitere Pole auf den Geraden $\Re(s) = 1, \ldots, n-1$ hinzu (Glieder aus* (1.24) *mit geradzahligem k) und, falls mindestens ein $g_i \neq 0$, Nullstellen auf den Geraden $\Re(s) = 1/2, \ldots, 1/2 + n - 1$ (Glieder aus* (1.24) *mit ungeradem k) und es können sich keine der hingeschriebenen Pole gegen Nullstellen fortheben.*

§ 2. Geometrische Zetafunktionen von Kongruenzfunktionenkörpern

2.1. *Zetafunktionen von Kongruenzmannigfaltigkeiten, gelöste Spezialfälle.* Es sei k das Galoisfeld von $q = p^f$ Elementen und M eine irreduzible Kongruenzmannigfaltigkeit der Dimension n über k, die einem projektiven Raum R_m $(m > n)$ über k durch die homogenen Polynome

$$\text{(2.1)} \qquad f_\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_m) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l;\ l \geqq m - n)$$

gegeben sei[16]). Mit $K(M)$ sei der Funktionenkörper von M bezeichnet; $K(M)$ ist vom Transzendenzgrad n über k. Die *Anzahl $N^{(r)}(M)$ der rationalen Punkte von M über $k^{(r)}$* ($k^{(r)}$ Galoisfeld von q^r Elementen) ist folgendermaßen erklärt:

$$\text{(2.2)} \qquad N^{(r)}(M) = \text{Anzahl der nichtproportionalen Lösungen}$$

$$(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m) \neq (0, \ldots, 0) \text{ von (2.1) in } k^{(r)}.$$

Nach dem Ansatz von A. WEIL (vgl. [9b] und (1.6)) erklären wir dann Zetafunktionen von M bzw. $K(M)$ gemäß

[16]) Unter der durch M gegebenen Erzeugung verstehen wir stets das vorgelegte Gleichungssystem (2.1), wodurch auch der Raum R_m festgelegt ist.

Definition 2(e). *Ist* $N^{(r)}(M)$ *gemäß* (2.2) *die Anzahl der rationalen Punkte der Kongruenzmannigfaltigkeit* M *in* $k^{(r)}$, *so wird durch*

$$\frac{d \log \zeta_M(z)}{d \log z} = \sum_{r=1}^{\infty} N^{(r)}(M)\, z^r \tag{2.3}$$

die Zetafunktion von M *erklärt. Vermöge der Festsetzung*

$$\zeta_{K(M)}(z; M) = \zeta_M(z) \tag{2.4}$$

wird diese zur geometrischen Zetafunktion $\zeta_{K(M)}(z; M)$ *des Funktionenkörpers* $K(M)$ *bezüglich der „Erzeugung" M.*

Für $\zeta_M(z)$ sind entsprechende Fragen wie für die arithmetischen Zetafunktionen zu klären, z.B. ob $\zeta_M(z)$ eine rationale Funktion von z ist, was sich über die Nullstellen und Pole von $\zeta_M(z)$ aussagen läßt und welcher Funktionalgleichung sie genügt. Bei der Zuordnung (2.4) interessiert darüber hinaus, wie $\zeta_{K(M)}(z; M)$ von der durch M gegebenen Erzeugung abhängt und welche Beziehungen zwischen $\zeta_{K(M)}(z; M)$ und der arithmetischen Zetafunktion von $K(M)$ bei der (2.1) entsprechenden Erzeugung von $K(M)$ bestehen[17]).

Es ist naheliegend, zunächst Mannigfaltigkeiten zu untersuchen, die durch eine homogene Gleichung $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$ mit Koeffizienten aus k erzeugt werden; im Fall $n = 1$ führt dies bei singularitätenfreier Erzeugung zur bekannten Theorie von **1.1**. [vgl. (1.6)].

Ferner wurde von A. Weil[18]) der Spezialfall der durch die homogene Gleichung

$$a_0 x_0^m + a_1 x_1^m + \cdots + a_{n+1} x_{n+1}^m = 0 \qquad (m \mid q-1;\ a_\nu \neq 0,\ a_\nu \in k) \tag{2.5}$$

erzeugten singularitätenfreien Mannigfaltigkeit M gelöst. Aus der Berechnung von $N^{(r)}(M)$ unter Benutzung abelscher Gruppencharaktere folgt hier:

$$\left\{\begin{array}{l} \zeta_M(z) = \dfrac{L(z)^{(-1)^{n+1}}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (1 - q^\nu z)} \\ \text{mit} \qquad L(z) = \prod\limits_{\substack{\chi_0, \ldots, \chi_{n+1} \neq 1 \\ \chi_0 \cdots \chi_{n+1} = 1,\ \chi_\nu^m = 1}} \left(1 - j(\chi_0, \ldots, \chi_{n+1};\ a_0, \ldots, a_{n+1})\, z\right), \end{array}\right. \tag{2.6}$$

wobei die $j(\chi_0, \ldots, \chi_{n+1};\ a_0, \ldots, a_{n+1})$ Produkte von Gaußschen Summen und vom Absolutbetrag $q^{n/2}$ sind. Speziell für $m = 1$, d.h. eine Hyperebene H (der zugehörige Funktionenkörper $K(H) = k(x_1, \ldots, x_n)$ ist rational) folgt

$$\zeta_H(z) = \frac{1}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (1 - q^\nu z)}; \tag{2.7}$$

[17]) Geht man in (2.1) zur inhomogenen Schreibweise über, so entstehen definierende Gleichungen von $K(M)$ über k und bei Auszeichnung von n Veränderlichen erhält man Erzeugungen in unserem früheren Sinne.

[18]) Vgl. [9b].

Vergleich mit (1.25) nach der Substitution $z = q^{-s}$ zeigt, daß für $n > 1$ bei den Exponenten der mittleren Glieder Abweichungen auftreten, die beiden Zetafunktionen stimmen also *nicht* überein.

Der Fall der durch die inhomogene Gleichung

$$y^p - y = a_1 x_1^m + \cdots + a_n x_n^m \qquad (m \mid p-1;\ a_\nu \neq 0,\ a_\nu \in k) \tag{2.8}$$

erzeugten Mannigfaltigkeit M soll hier mit entsprechenden Mitteln behandelt werden[19]). Zuerst bestimmen wir die Anzahl $A^{(r)}(M)$ der verschiedenen Lösungen $(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ von (2.8) in $k^{(r)}$.

Ist $\chi(x)$ ein Multiplikativcharakter von k von der genauen Ordnung m, so ist auch der durch χ in $k^{(r)}$ induzierte Charakter $\chi_{(r)}(x) = \chi\big(N_r(x)\big)$ (N_r Relativnorm von $k^{(r)}$ nach k) von der genauen Ordnung m. Die Lösungsanzahl der Gleichung $x^m = u$ in $k^{(r)}$ wird für alle $u \in k^{(r)}$ [20]) gegeben durch

$$B_{(r)}(u) = \sum_{b=1}^{m} \chi_{(r)}^b(u). \tag{2.9}$$

Entsprechend ist die Lösungsanzahl von $y^p - y = v$ in $k^{(r)}$ durch

$$\left\{\begin{array}{l} B_{(r)}^*(v) = \sum\limits_{c \in \Gamma} e^{(r)}[c \cdot v] \quad \text{mit} \quad e^{(r)}[\ldots] = e^{\frac{2\pi i}{p} S_r(s(\ldots))}, \\ s(\ldots)\ \text{Absolutspur von } k \text{ zum Primkörper } \Gamma, \\ S_r(\ldots)\ \text{Relativspur von } k^{(r)} \text{ nach } k, \end{array}\right. \tag{2.10}$$

gegeben. Es ist

$$\begin{aligned} A^{(r)}(M) &= \sum_{u_1 \in k^{(r)}} \cdots \sum_{u_n \in k^{(r)}} B_{(r)}(u_1) \ldots B_{(r)}(u_n) \cdot B_{(r)}^*(a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n) \\ &= \sum_{c \in \Gamma} \sum_{b_1=1}^{m} \cdots \sum_{b_n=1}^{m} \tau(\chi_{(r)}^{b_1}; e_{c a_1}^{(r)}) \ldots \tau(\chi_{(r)}^{b_n}; e_{c a_n}^{(r)}) \end{aligned}$$

mit

$$\tau(\chi_{(r)}^{b_\nu}; e_{c a_\nu}^{(r)}) = \sum_{u_\nu \in k^{(r)}} \chi_{(r)}^{b_\nu}(u_\nu)\, e^{(r)}[c a_\nu u_\nu];$$

hieraus folgt

$$A^{(r)}(M) = q^{rn} + \sum_{\substack{c \neq 0 \\ c \in \Gamma}} \sum_{b_1=1}^{m-1} \cdots \sum_{b_n=1}^{m-1} \tau(\chi_{(r)}^{b_1}; e_{c a_1}^{(r)}) \ldots \tau(\chi_{(r)}^{b_n}; e_{c a_n}^{(r)}). \tag{2.11}$$

Gehen wir mit Hilfe der Substitutionen $x_1 = x_1'/x_0', \ldots, x_n = x_n'/x_0', y = x_{n+1}'/x_0'$ zu der (2.8) entsprechenden homogenen Gleichung über, so ist $A^{(r)}(M)$ die Anzahl der nichtproportionalen Lösungen mit $x_0' \neq 0$ derselben. Hinzu kommen für $x_0' = 0$ [21]) weitere $1 + q^r + \cdots + q^{r(n-1)}$ nichtproportionale Lösungen

[19]) Für $n = 1$ wurden die Parallelfälle (2.5) und (2.8) schon früher von DAVENPORT und HASSE [3c] mit analogen Mitteln behandelt.

[20]) Auch für $u = 0$ aus $k^{(r)}$, da $\chi_{(r)}^b(0) = 0$ für $b \neq m$ und $\chi_{(r)}^b(0) = 1$ für $b = m$.

[21]) Hier muß $x_{n+1}' = 0$ sein, während $x_1', \ldots, x_n'$ beliebig sein können.

$\neq (0, \ldots, 0)$. Wegen $-\tau\left(\chi_{(r)}^{b_\nu}; e_{ca_\nu}^{(r)}\right) = \left(-\tau(\chi^{b_\nu}; e_{ca_\nu})\right)^r$ ist also

$$(2.12)\quad \begin{cases} N^{(r)}(M) = 1 + q^r + \cdots + q^{rn} - \\ -(-1)^{n+1} \sum\limits_{\substack{c \neq 0 \\ c \in \Gamma}} \sum\limits_{b_1=1}^{m-1} \cdots \sum\limits_{b_n=1}^{m-1} [(-1)^n \tau(\chi^{b_1}; e_{ca_1}) \ldots \tau(\chi^{b_n}; e_{ca_n})]^r. \end{cases}$$

Setzt man (2.12) in (2.3) ein und summiert die entstehenden geometrischen Reihen auf[22]), so erhält man

$$\frac{d \log \zeta_M(z)}{d \log z} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{q^\nu z}{1 - q^\nu z} - \\ -(-1)^{n+1} \sum_{\substack{c \neq 0 \\ c \in \Gamma}} \sum_{b_1=1}^{m-1} \cdots \sum_{b_n=1}^{m-1} \frac{z(-1)^n \tau(\chi^{b_1}; e_{ca_1}) \ldots \tau(\chi^{b_n}; e_{ca_n})}{1 - (-1)^n \tau(\chi^{b_1}; e_{ca_1}) \ldots \tau(\chi^{b_n}; e_{ca_n})\, z},$$

also ist

$$(2.13)\quad \begin{cases} \zeta_M(z) = \dfrac{L(z)^{(-1)^{n+1}}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (1 - q^\nu z)} \\ \text{mit} \quad L(z) = \prod\limits_{\substack{c \in \Gamma \\ c \neq 0}} \prod_{b_1=1}^{m-1} \cdots \prod_{b_n=1}^{m-1} \left(1 - (-1)^n \tau(\chi^{b_1}; e_{ca_1}) \ldots \tau(\chi^{b_n}; e_{ca_n}) \cdot z\right). \end{cases}$$

$\zeta_M(z)$ ist eine rationale Funktion von z von analoger Struktur wie diejenige in (2.6), die Absolutbeträge der Nullstellen und Pole von $\zeta_M(z)$ sind durch (2.13) bestimmt und es gilt auch hier die Verallgemeinerung der Riemannschen Vermutung.

Die Zetafunktionen $\zeta_M(z)$ in (2.6) und (2.13) genügen der Funktionalgleichung

$$(2.14)\quad \frac{\zeta_M(z)}{\zeta_M\left(\frac{1}{q^n z}\right)} = \pm\, q^{\frac{n}{2}h}\, z^{-h} \qquad (h = \text{Nennergrad} - \text{Zählergrad von } \zeta_M(z));$$

(2.14) ist weitgehend analog zu (1.12), (1.13).

Aus der Definition der geometrischen Zetafunktion folgen zusammen mit den in (2.12), (2.13) und (2.14) enthaltenen Überlegungen auch für wesentlich allgemeinere Mannigfaltigkeiten M unmittelbar die nachstehenden Beziehungen zwischen $\zeta_{K(M)}(z; M)$ und $\zeta_{K^{(r)}(M)}(z; M^{(r)})$ (Konstantenerweiterung von k zu $k^{(r)}$):

Lemma 1. *Ist $\zeta_{K(M)}(z; M)$ eine rationale Funktion von z, so ist auch $\zeta_{K^{(r)}(M)}(z; M^{(r)})$ eine rationale Funktion von z und hat als Nullstellen bzw. Pole die r-ten Potenzen derjenigen von $\zeta_{K(M)}(z; M)$. Genügt $\zeta_{K(M)}(z; M)$ zudem einer Funktionalgleichung vom Typus* (2.14), *so auch $\zeta_{K^{(r)}(M)}(z; M^{(r)})$*[23]).

[22]) Dies ist für $|z| < \frac{1}{q^n}$ erlaubt.

[23]) Wenn $\zeta_{K(M)}(z; M)$ rational ist, so ist (für jedes ϱ) $N^{(\varrho)}(M)$ die Differenz der Summen der ϱ-ten Potenz der Pole und der der Nullstellen von $\zeta_{K(M)}(z; M)$; insbesondere gilt dies also auch für alle ϱ mit $\varrho \equiv 0 \bmod r$, die allein in die Definition von $\zeta_{K^{(r)}(M)}(z; M^{(r)})$ eingehen. Hieraus folgen die obengenannten Aussagen.

2.2. *Der Kompositionssatz der geometrischen Zetafunktionen.* Es seien M_1 und M_2 Kongruenzmannigfaltigkeiten über k, die in der Form (2.1) in Räumen R_{m_1} bzw. R_{m_2} gegeben seien. Wir betrachten die Produktmannigfaltigkeit $M_1 \times M_2$ (in dem Produktraum $R_{m_1} \times R_{m_2}$); ihr Funktionenkörper $K(M_1 \times M_2)$ ist gleich dem über k gebildeten unabhängigen Kompositum von $K(M_1)$ und $K(M_2)$. Die Gesamtheit der Punkte von $M_1 \times M_2$ wird durch die Gesamtheit der geordneten Paare von Punkten aus M_1 und M_2 geliefert; somit gilt

$$N^{(r)}(M_1 \times M_2) = N^{(r)}(M_1) \cdot N^{(r)}(M_2) \quad \text{für jedes } r \geq 1. \tag{2.15}$$

Angenommen, es sei für $i = 1, 2$ und jedes $r \geq 1$

$$N^{(r)}(M_i) = \sum_{\lambda_i=1}^{l_i} (-1)^{a_{i\lambda_i}} \alpha_{i\lambda_i}^r \qquad (a_{i\lambda_i} = \mp 1) \tag{2.16}$$

mit komplexen Zahlen $\alpha_{i\lambda_i}$, d.h. für $|z| < \operatorname{Min}_{\lambda_i} \left| \frac{1}{\alpha_{i\lambda_i}} \right|$ konvergiere jeweils die Reihendarstellung (2.3) und es sei

$$\zeta_{M_i}(z) = \prod_{\lambda_i=1}^{l_i} (1 - \alpha_{i\lambda_i} z)^{(-1)^{a_{i\lambda_i}+1}}, \tag{2.16a}$$

also eine rationale Funktion von z, so folgt wegen (2.15)

$$N^{(r)}(M_1 \times M_2) = \sum_{\lambda_1=1}^{l_1} \sum_{\lambda_2=1}^{l_2} (-1)^{a_{1\lambda_1}+a_{2\lambda_2}} (\alpha_{1\lambda_1}\alpha_{2\lambda_2})^r \qquad (r \geq 1), \tag{2.17}$$

also ist

$$\zeta_{M_1 \times M_2}(z) = \prod_{\lambda_1=1}^{l_1} \prod_{\lambda_2=1}^{l_2} (1 - \alpha_{1\lambda_1}\alpha_{2\lambda_2} z)^{(-1)^{a_{1\lambda_1}+a_{2\lambda_2}+1}}, \tag{2.17a}$$

wobei die zugehörige Reihendarstellung (2.3) für $|z| < \operatorname{Min}_{\lambda_1,\lambda_2} \frac{1}{\alpha_{1\lambda_1}\alpha_{2\lambda_2}}$ konvergiert.

Nimmt man zusätzlich an, daß $\zeta_{M_1}(z)$ und $\zeta_{M_2}(z)$ einer Funktionalgleichung vom Typus (2.14) genügen, so folgt bei fast wörtlicher Übertragung des Beweises von Satz 1, wobei jeweils q^{-s} durch z zu ersetzen ist, daß auch $\zeta_{M_1 \times M_2}(z)$ einer Funktionalgleichung dieses Typus genügt. — Interpretiert man diese Funktionen als geometrische Zetafunktionen der zugehörigen Funktionenkörper, so ergibt sich zusammen mit dem Lemma aus **2.1.** ein dem Satz 1 entsprechender Kompositionssatz.

Satz 2. *Sind für $i = 1, 2$ die geometrischen Zetafunktionen der algebraischen Funktionenkörper $K(M_i)$ über k bezüglich der Erzeugungen M_i gemäß* (2.16), (2.16a) *rationale Funktionen von z, so ist auch die geometrische Zetafunktion des unabhängigen Kompositums $K(M_1) \cdot K(M_2)$ bezüglich der Erzeugung $M_1 \times M_2$ gemäß* (2.17a) *eine rationale Funktion von z, deren zugehörige Reihendarstellung* (2.3) *für $|z| < \operatorname{Min}_{\lambda_1,\lambda_2} |1/\alpha_{1\lambda_1}\alpha_{2\lambda_2}|$ konvergiert. Genügt für $i = 1, 2$ $\zeta_{K(M_i)}(z; M_i)$ einer Funktionalgleichung vom Typus* (2.14), *so auch $\zeta_{K(M_1)\cdot K(M_2)}(z; M_1 \times M_2)$; ferner sind die geometrischen Zetafunktionen der endlich-algebraischen Konstantenerweiterungen jedes Grades r von $K(M_1) \cdot K(M_2)$ diejenigen rationalen Funktionen von z, die als Nullstellen bzw. Pole die r-ten Potenzen derjenigen von $K(M_1) \cdot K(M_2)$ haben.*

Nach den bisherigen Ergebnissen ist Satz 2 sicher anwendbar, wenn M_i entweder eine singularitätenfreie Erzeugung einer ebenen algebraischen Kurve oder eine Erzeugung vom Typus (2.5) bzw. (2.8) bedeutet. Weiter dürfen die Komponenten M_i selbst wieder Produktmannigfaltigkeiten mit den geforderten Eigenschaften sein; somit enthält Satz 2 seine Verallgemeinerung auf n-fache Produktmannigfaltigkeiten, d.h. auf die n-fachen unabhängigen Komposita der zugehörigen Funktionenkörper.

Vergleicht man speziell die Zetafunktion des direkten Produktes von n singularitätenfreien ebenen Kurven mit der arithmetischen Zetafunktion des zugehörigen Funktionenkörpers bei symmetrischer Erzeugung (Korollar 1 zu Satz 1), so folgt aus Satz 2 das

Korollar 1 zu Satz 2. *Die geometrische Zetafunktion des Funktionenkörpers* $A = K(M_1) \cdots K(M_n)$ *des Produktes von n singularitätenfreien ebenen Kurven* M_i *stimmt bei der Ersetzung* $z = q^{-s}$ *mit der arithmetischen Zetafunktion dieses Körpers bei der entsprechenden symmetrischen Erzeugung* $x_1, \ldots, x_n$ *überein, d.h. es ist*

$$\zeta_A(z; M_1 \times \cdots \times M_n) = Z_A(s; x_1, \ldots, x_n), \quad \textit{falls } z = q^{-s}. \tag{2.18}$$

Sind speziell n Geraden zugrunde gelegt, so stimmt die geometrische Zetafunktion des (zugehörigen) rationalen Funktionenkörpers von n Veränderlichen über k bei der Substitution $z = q^{-s}$ mit der in (1.25) erklärten Zetafunktion überein. Vergleich mit (2.7) zeigt, daß für $n \geqq 2$ diesem Körper mindestens zwei verschiedene geometrische Zetafunktionen zugeordnet werden können[24]). Diese Unterschiede lassen sich jedoch durch die verschiedene Erfassung des „Unendlichen" in einfach- bzw. mehrfach-projektiven Räumen erklären.

2.3. *Halbrationale Funktionenkörper von zwei Veränderlichen.* Es sei

$$f(x_0, x_1, x_2) = 0 \tag{2.19}$$

eine singularitätenfreie homogene Erzeugung einer ebenen Kurve C_1 vom Geschlecht g über k, $N^{(r)}(C_1)$ die Lösungsanzahl von (2.19) in k und

$$\zeta_{C_1}(z) = \zeta_{K(C_1)}(z; C_1) = \frac{\prod_{\lambda=1}^{2g} (1 - \alpha_\lambda z)}{(1 - z)(1 - qz)} \tag{2.20}$$

die zugehörige Zetafunktion. Ist weiter H_1 eine Gerade, so ist nach dem Korollar 1 von Satz 2

$$\zeta_{C_1 \times H_1}(z) = \zeta_{K(C_1) \cdot K(H_1)}(z; C_1 \times H_1) = \zeta_{K(C_1)}(z; C_1)\, \zeta_{K(C_1)}(qz; C_1); \tag{2.21}$$

der zugehörige Funktionenkörper $K(C_1) \cdot K(H_1)$ ist ein halbrationaler Funktionenkörper von zwei Veränderlichen[25]) über k.

[24]) Für $n \geqq 3$ sogar in einfacher Weise noch mehr, indem man Produkte von Geraden, Ebenen und Hyperebenen bildet.

[25]) Ein solcher ist als unabhängiges Kompositum eines rationalen und eines Funktionenkörpers höheren Geschlechts über k darstellbar; vgl. im klassischen Fall etwa H. W. E. Jung [4], S. 181.

Wir betrachten gleichzeitig die durch die Gl. (2.19) im projektiven Raum R_3 erzeugte Fläche M, deren Funktionenkörper $K(M) = K(C_1) \cdot K(H_1)$ ist, und untersuchen die geometrische Zetafunktion $\zeta_{K(M)}(z; M)$. Die Anzahl der rationalen Punkte von M in $k^{(r)}$ bestimmt sich durch die von C_1 gemäß

$$N^{(r)}(M) = 1 + q\, N^{(r)}(C_1), \tag{2.22}$$

also ist im Konvergenzbereich der Reihendarstellung (2.3)

$$\zeta_{K(M)}(z; M) = \frac{1}{1-z}\, \zeta_{K(C_1)}(q\, z; C_1). \tag{2.23}$$

Diese halbrationalen Funktionenkörper liefern also ein weiteres Beispiel dafür, daß man einem Funktionenkörper verschiedene geometrische Zetafunktionen zuordnen kann.

Bezeichnen wir mit $L_{C_1}(z)$ das Zählerpolynom von $\zeta_{K(C_1)}(z; C_1)$, so gelten wegen (1.4) folgende „Funktionalgleichungen" für $\zeta_{K(M)}(z; M)$

$$\frac{\zeta_{K(M)}(z; M)}{\zeta_{K(M)}\left(\frac{1}{q^2 z}; M\right)} = -\frac{z^{2g-3}}{q^{3-g}} \cdot \frac{L_{C_1}(q\, z)}{L_{C_1}(z)} \tag{2.24}$$

bzw.

$$\frac{\zeta_{K(M)}(z; M)}{\zeta_{K(M)}\left(\frac{1}{q^3 z}; M\right)} = -\frac{z^{2g-3}}{q^{3g-6}} \cdot \frac{1-q^3 z}{1-z}, \tag{2.25}$$

die beide nicht vom Typus (2.14) sind[26]).

§ 3. Arithmetische Funktionenkörper mehrerer Veränderlicher

3.1. *Zetafunktionen in arithmetischen Funktionenkörpern.* Einem arithmetischen Funktionenkörper A von n Veränderlichen, d.h. einer endlich-erzeugbaren Erweiterung vom Transzendenzgrad n über einem endlich-algebraischen Zahlkörper $\varkappa = A_0$, lassen sich gemäß Definition 1(a) (unvollständige) arithmetische Zetafunktionen zuordnen. Aber auch das Schema der geometrischen Zetafunktion kann, wie folgt, übertragen werden:

Es sei M eine Mannigfaltigkeit über $\varkappa$ mit dem Funktionenkörper $K(M) = A$, die in einem ein- oder mehrfach projektiven Raum durch die homogenen Polynome

$$f_\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_m) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l;\ l \geqq m - n) \tag{3.1}$$

mit ganzalgebraischen Koeffizienten aus $\varkappa$ und vom jeweiligen Inhalt 1 gegeben sei. Ist $\mathfrak{P}_0$ ein endlicher Primdivisor von $\varkappa$, so bedeute $M\,\mathfrak{P}_0$ die durch

$$f_{\lambda,\,\mathfrak{P}_0}(x_0, x_1, \ldots, x_m) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l;\ l \geqq m - n) \tag{3.2}$$

erklärte Kongruenzmannigfaltigkeit über $\varkappa\mathfrak{P}_0$ (Galoisfeld von $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_0)$ Elementen), wobei jeweils $f_{\lambda,\,\mathfrak{P}_0}$ aus f_λ entsteht, indem man die Koeffizienten durch ihre Restklassen mod $\mathfrak{P}_0$ ersetzt.

[26]) Auch beim Übergang von z zu $1/qz$ gilt keine Funktionalgleichung vom Typus (2.14). — Entsprechend lassen sich allgemeinere Beispiele mit dieser Eigenschaft bilden.

Definition 2(a). *Durch*

$$\zeta_A(s;M)=\prod_{\mathfrak{P}_0}\zeta_{K(M\mathfrak{P}_0)}\left(\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_0)^s;M\mathfrak{P}_0\right), \tag{3.3}$$

wobei das Produkt über alle endlichen Primdivisoren $\mathfrak{P}_0$ von $\varkappa$ läuft und $\zeta_{K(M\mathfrak{P}_0)}(z;M\mathfrak{P}_0)$ jeweils entsprechend[27]) *Definition* 2(e) *bestimmt ist, wird die* geometrische Zetafunktion $\zeta_A(s;M)$ *des arithmetischen Funktionenkörpers A bezüglich M erklärt.*

Bis jetzt wurden Zetafunktionen von arithmetischen Funktionenkörpern K_i einer Veränderlichen vom Geschlecht g_i in folgenden Spezialfällen untersucht:

(I) *Rationale Funktionenkörper* $K_i=\varkappa(x)$;

(II) *Körper vom Fermatschen Typus*, d.h. solche, die durch eine Gleichung der Form

$$a\,y^m+b\,x^n=c \qquad (a,b,c\in\varkappa) \tag{3.4}$$

über einem Körper $\varkappa$, der die m-ten und n-ten Einheitswurzeln enthält, erzeugt sind (von A. Weil [9b] auf geometrischem[28]) und von Hasse [3b] auf arithmetischem Wege untersucht).

(III) *Elliptische Funktionenkörper mit komplexer Multiplikation* (von Deuring [2b] auf vorwiegend geometrischem Wege[28]) untersucht).

Die Zetafunktionen sind von der Struktur

$$Z_{K_i}^*(s)=\left(\zeta_{K_i}(s;M)\right)=Z_\varkappa^*(s)\,Z_\varkappa^*(s-1)\cdot\prod_{\nu_i=1}^{2g_i}L_\varkappa^*(s\,|\,\lambda_{i\nu_i})^{-1}, \tag{3.5}$$

wobei die $L_\varkappa^*(s\,|\,\lambda_{i\nu_i})$ jeweils mit *Heckeschen Größencharakteren* $\lambda_{i\nu_i}$ gebildete L-Funktionen von $\varkappa$ sind[29]). Ein Größencharakter $\lambda_{i\nu_i}$ ist dabei eine komplexwertige Funktion der zu einem Führer $\mathfrak{f}(\lambda_{i\nu_i})$ primen ganzen Divisoren von $\varkappa$, die der Funktionalgleichung $\lambda_{i\nu_i}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})=\lambda_{i\,i}(\mathfrak{A})\cdot\lambda_{i\nu_i}(\mathfrak{B})$ genügt und die für Hauptdivisoren (α) mit $\alpha\equiv 1 \bmod \mathfrak{f}(\lambda_{i\nu_i})$ gemäß

$$\lambda_{i\nu_i}((\alpha))=\prod_\mu\alpha_\mu^{a_\mu}\prod_\mu|\alpha_\mu|^{c_\mu} \qquad (\alpha_\mu \text{ alle Konjugierten von } \alpha) \tag{3.6}$$

mit ganzrationalen Zahlen a_μ und komplexzahligen c_μ darstellbar ist[30]). Die Werte der $2g_i$ Größencharaktere $\lambda_{i\nu_i}$ für die zu $\mathfrak{f}(\lambda_{i\nu_i})$ primen Primdivisoren $\mathfrak{P}_0$ von $\varkappa$ werden bei geeigneter Numerierung durch die $2g_i$ Nullstellen der

[27]) Auch falls $M\mathfrak{P}_0$ keine irreduzible Mannigfaltigkeit, d.h. falls $K(M\mathfrak{P}_0)$ kein Körper, sondern eine Algebra über $\varkappa\mathfrak{P}_0$ ist, werde $\zeta_{K(M\mathfrak{P}_0)}(z;M\mathfrak{P}_0)$ durch (2.3), (2.4) erklärt, da die Lösungsanzahlen $N^{(r)}(M\mathfrak{P}_0)$ von (3.2) unabhängig von der Körpereigenschaft erklärt sind.

[28]) Bei den geometrischen Untersuchungen wurden die endlich vielen Faktoren in (3.3), bei denen $K(M\mathfrak{P}_0)$ von A abweichendes Geschlecht hat, zunächst vernachlässigt; in diesem Sinne lassen sich die Deuringschen Ergebnisse in die arithmetische Sprechweise übersetzen.

[29]) Im Fall (I) ist das Produkt $\prod_{\nu_i=1}^{2g_i}$ durch 1 zu ersetzen.

[30]) Vgl. etwa A. Weil [9d], S. 487.

jeweiligen Zetafunktionen $Z_{K_i\mathfrak{P}'_0}(s)$ bzw. $\zeta_{K(M_i\mathfrak{P}_0)}(\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_0)^{-s}; M)$ geliefert; die hierzu erforderliche Sortierung der Nullstellen wird z.B. in (II) mit Hilfe gruppentheoretischer Überlegungen durchgeführt (die Nullstellen sind Jacobische Summen, deren Argumente Gruppencharaktere sind).

Wir formulieren folgenden weiteren Kompositionssatz:

Satz 3. *Ist $A \cong K_1 \cdots K_n$ ein symmetrisch-erzeugbarer arithmetischer Funktionenkörper von n Veränderlichen über $\varkappa$ und ist für $i = 1, \ldots, n$ bei der zugrunde gelegten Erzeugung die arithmetische Zetafunktion $Z^*_{K_i}(s; x_i)$ vom Typus (3.5), wobei die Größencharaktere λ_{iv_i} durch die Nullstellen von $Z_{K_i\mathfrak{P}'_0}(s)$ bestimmt sind, so ist die arithmetische Zetafunktion von A von der Form*

$$(3.7)\quad \left\{ \begin{array}{l} Z^*_A(s; x_1, \ldots, x_n) \\ = Z^{*[n]}_{\varkappa}(s) \prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} \prod_{v_{i_1}=1}^{2g_{i_1}} \cdots \prod_{v_{i_k}=1}^{2g_{i_k}} \left[L^{*[n-k]}_{\varkappa}(s \mid \lambda_{i_1 v_{i_1}} \cdots \lambda_{i_k v_{i_k}}) \right]^{(-1)^{k+1}} \right), \end{array} \right.$$

wobei $Z^{*[n]}_{\varkappa}(s)$ bzw. $L^{*[n-k]}_{\varkappa}(s \mid \lambda_{i_1 v_{i_1}} \cdots \lambda_{i_k v_{i_k}})$ wie in (1.23) erklärt ist. Dies gilt insbesondere dann, wenn alle K_i vom Typus (I) bzw. (II) bzw. (III) sind.

Beweis. Aus der Definition der symmetrischen Erzeugbarkeit folgt unmittelbar, daß auch $(K_1 \cdots K_n)\mathfrak{P}'_0 \cong K_1\mathfrak{P}'_0 \cdots K_n\mathfrak{P}'_0$ für jeden Primdivisor $\mathfrak{P}'_0$ symmetrisch-erzeugbar ist. Da ferner das Produkt endlich vieler Größencharaktere wieder ein Größencharakter ist (erklärbar nach dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Führer), folgt wegen (1.24) und der Voraussetzung (3.5) bei der zugrunde gelegten Sortierung der Nullstellen (3.7), was die Behauptung ergibt.

Das obige Kompositionsschema läßt sich verallgemeinern auf den Fall, daß jede Komponente K_i von A ein Funktionenkörper mehrerer Veränderlicher über $\varkappa$ ist, dessen Zetafunktion Quotient von Produkten von L-Funktionen von $\varkappa$ mit durch die Nullstellen bzw. Pole von $Z_{K_i\mathfrak{P}'_0}(s)$ bestimmten Größencharakteren ist.

Auch die geometrischen Zetafunktionen können in weiteren Spezialfällen arithmetischer Funktionenkörper von höherem Transzendenzgrad bestimmt werden: 1. M sei eine durch eine Gleichung der Form (2.5) über einem Zahlkörper erzeugte Mannigfaltigkeit[31]; 2. M sei Produktmannigfaltigkeit, deren Komponenten vom Typus (I), (II), (III) oder 1. sind. Die zugehörigen geometrischen Zetafunktionen sind dann wieder als Quotienten von Produkten von Heckeschen L-Funktionen darstellbar.

3.2. *Vergleich arithmetischer Funktionenkörper einer Veränderlichen mit Doppelkörpern über einem Galoisfeld.* Die weitgehenden Parallelen zwischen der Arithmetik eines endlich-algebraischen Zahlkörpers $\varkappa$ einerseits und der eines Funktionenkörpers K_i einer Veränderlichen über einem Galoisfeld andererseits legen es nahe, entsprechende Parallelen in der nächsthöheren Stufe zu

[31]) Die Nullstellen von $\zeta_{K(M\mathfrak{P}_0)}(z; M\mathfrak{P}_0)$ sind dann allgemeine Jacobische Summen und liefern bei entsprechender Sortierung wie in (II) Heckesche Größencharaktere von $\varkappa$.

suchen, d.h. zwischen arithmetischen Funktionenkörpern einer Veränderlichen und Funktionenkörpern zweier Veränderlichen über einem Galoisfeld. Wir wollen hier einen solchen Vergleich für die arithmetischen Zetafunktionen arithmetischer Funktionenkörper K_i der in **3.1** aufgezählten Typen (I), (II), (III) und für *Doppelkörper* über einem Galoisfeld, d.h. symmetrisch-erzeugbare Funktionenkörper $A = K_1 \cdot K_2$ zweier Veränderlichen, durchführen.

In beiden Fällen wird der Gesamtkörper zunächst als Funktionenkörper einer Veränderlichen über einem relativen „Konstantenkörper" aufgefaßt [vgl. (0.3)]; dieser „Konstantenkörper" ist im ersten Fall (a) der in natürlicher Weise ausgezeichnete endlich-algebraische Zahlkörper $\varkappa$, im zweiten Fall (e) eine zunächst willkürlich ausgezeichnete Komponente von A, etwa K_1. Während aber im Fall (e) alle Primdivisoren von K_1 zugrunde gelegt werden, beschränkt man sich im Fall (a) auf die endlichen Primdivisoren von $\varkappa$, d.h. auf die nichtarchimedischen Bewertungen. Dies hat folgende Konsequenzen:

Beim Übergang von s zu $2-s$ genügt $Z^*_{K_i}(s)$ einer durch die Funktionalgleichungen von $Z^*_\varkappa(s)$ und $L^*_\varkappa(s|\lambda_{iv_i})$ bestimmten Funktionalgleichung, die aber von der von $Z_{K_1 \cdot K_2}(s)$ [vgl. (1.11), (1.21)] insofern abweicht, als auf der rechten Seite noch Γ-Faktoren usw. stehen. Ergänzt man $Z^*_\varkappa(s)$ und $L^*_\varkappa(s|\lambda_{iv_i})$ in geläufiger Weise (vgl. etwa Hasse [3e]) durch Hinzunahme von Beiträgen der unendlichen Primdivisoren zu vollständigen Zeta- bzw. L-Funktionen, so daß die ergänzten Funktionen $Z_\varkappa(s)$, $L_\varkappa(s|\lambda_{iv_i})$ einer Funktionalgleichung vom Typus (1.11)[32]) genügen, so trifft dies auch für $Z_{K_i}(s)$ beim Übergang von s zu $2-s$ zu. Die so hinzugekommenen Faktoren können als Beiträge der unendlichen Primstellen $\mathfrak{P}_0$ von $\varkappa$ zu $Z_{K_i}(s)$ geschrieben werden und $Z_{K_i}(s)$ werde die vollständige arithmetische Zetafunktion von K_i genannt[33]).

Wir vergleichen jetzt die Darstellung (3.5) von $Z^*_{K_i}(s)$ mit der aus (1.17) folgenden Darstellung der arithmetischen Zetafunktion des Doppelkörpers $K_1 \cdot K_2$

$$(3.8)\quad \begin{cases} Z_{K_1 \cdot K_2}(s) = Z_{K_1}(s)\, Z_{K_1}(s-1) \prod\limits_{\nu_1=1}^{2g_2} Z_{K_1}(s-\gamma_{2\nu_2})^{-1}, \\ \text{mit } q^{\gamma_{2\nu_2}} = \alpha_{2\nu_2},\ \alpha_{2\nu_2}(\nu_2 = 1, \ldots, 2g_2) \text{ alle Nullstellen von } Z_{K_2}(s) \text{ in } q^{-s}. \end{cases}$$

Obwohl der Begriff des Heckeschen Größencharakters zunächst auf endlich-algebraische Zahlkörper beschränkt ist, können auch die $2g_2$ letzten Faktoren in (3.8) als formale „L-Funktionen" von K_1 geschrieben werden; es ist nämlich

$$(3.9)\qquad Z_{K_1}(s-\gamma_{2\nu_2}) = L_{K_1}(s|\lambda_{2\nu_2}) = \prod_{\mathfrak{P}} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_{2\nu_2}(\mathfrak{P})}{\mathfrak{N}(\mathfrak{P})^s}} \qquad (\nu_2 = 1, \ldots, 2g_2),$$

wobei das Produkt über alle Primdivisoren $\mathfrak{P}$ von K_1 läuft und $\lambda_{2\nu_2}(\mathfrak{P})$ für alle Divisoren $\mathfrak{A}$ von K_1 jeweils durch

$$(3.10)\quad \begin{cases} \lambda_{2\nu_2}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \lambda_{2\nu_2}(\mathfrak{A}) \cdot \lambda_{2\nu_2}(\mathfrak{B}), \\ \lambda_{2\nu_2}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{P})^{\gamma_{2\nu_2}} \quad \text{für alle } \mathfrak{P} \text{ von } K_1, \end{cases}$$

[32]) Für q^{hi} ist natürlich eine andere Konstante zu setzen.

[33]) Die einfachen und formalen Umrechnungen sollen hier nicht weiter ausgeführt werden.

erklärt ist. $\lambda_{2\nu_2}$ ist gemäß (3.10) eine komplexwertige „Multiplikativdarstellung" der Divisorengruppe von K_1 (vom „Führer" 1), die für alle Hauptdivisoren den Wert 1 annimmt[34]). Entsprechend wie nach einer Bemerkung von A. WEIL (vgl. [9d, e]) jedem Heckeschen Größencharakter ein *Idelklassencharakter* des Zahlkörpers $\varkappa$ entspricht, kann man auch jedem unserer obigen $\lambda_{2\nu_2}$ einen Multiplikativcharakter vom „Führer" 1 der (abstrakten) Idelklassengruppe von K_1 zuordnen durch folgende Festsetzung

$$(3.11)\quad \begin{cases} \lambda_{2\nu_2}[\xi\eta] = \lambda_{2\nu_2}[\xi]\,\lambda_{2\nu_2}[\eta] & (\xi, \eta \text{ Idele von } K_1) \\ \lambda_{2\nu_2}[\xi_{\mathfrak{P}}] = \lambda_{2\nu_2}(\mathfrak{P}^{w_{\mathfrak{P}}(\xi_{\mathfrak{P}})}), & \text{falls } \xi_{\mathfrak{P}} = (1, \ldots, 1, \xi_{\mathfrak{P}}, 1, \ldots, 1). \end{cases}$$

Dies legt nahe, $\lambda_{2\nu_2}$ als Spezialfall einer allgemeineren Klasse von Charakterfunktionen der Idelklassen- bzw. Divisorengruppe von K_1, die auch die Kongruenzcharaktere von K_1 umfaßt, zu deuten und neben der Frage nach der Struktur dieser Gruppe auch zu untersuchen, ob allgemeinere solcher Charakterfunktionen im Zusammenhang mit der Theorie der Zetafunktionen auftreten[35]).

Einen speziellen Einbettungsprozeß dieser „Charaktere" erhält man folgendermaßen: Man bildet das direkte Produkt der Gruppe der Kongruenzcharaktere $\chi(\mathfrak{A})$ von K_1 mit der Gruppe der „Charaktere"

$$(3.12)\qquad \lambda_c(\mathfrak{A}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{A})^c \qquad (c \text{ komplexe Zahl, } \mathfrak{A} \text{ Divisor von } K_1).$$

Bezeichnung $\chi \times \lambda_c(\mathfrak{A}) = \chi(\mathfrak{A})\,\lambda_c(\mathfrak{A})$[36]). Läßt man auch Linearkombinationen der $\chi \times \lambda_c$ mit ganzrationalen Koeffizienten zu, d.h. betrachtet man Elemente $\Lambda(\mathfrak{A}) = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu\, \chi_\mu \times \lambda_{c_\mu}(\mathfrak{A})$ (a_μ ganzrational) des ganzzahligen zugehörigen Gruppenringes, so kann man nach dem Schema der Artinschen L-Funktionen (vgl. HASSE [3e]) allgemeinere L-Funktionen von K_1 bilden:

$$(3.13)\quad L_{K_1}(s|\Lambda) = \prod_{\mathfrak{P}} L_{\mathfrak{P}}(s|\Lambda, K_1) \quad \text{wobei} \quad \log L_{\mathfrak{P}}(s|\Lambda, K_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(\mathfrak{P}^m)}{m \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{P}^m)^s};$$

$L_{K_1}(s|\Lambda)$ kann entsprechend der Summenzerlegung von $\Lambda(\mathfrak{A})$ in geläufiger Weise in ein Produkt zerlegt werden. In dieser Bezeichnungsweise ist

$$(3.14)\quad \begin{cases} Z_{K_1 \cdot K_2}(s) = L_{K_1}(s|\Lambda_2) \quad \text{mit} \quad \Lambda_2(\mathfrak{A}) = \lambda_0(\mathfrak{A}) + \lambda_1(\mathfrak{A}) - \sum_{\nu_2=1}^{2g_2} \lambda_{2\nu_2}(\mathfrak{A}), \\ \text{wobei } \lambda_0, \lambda_1 \text{ gemäß (3.12), } \lambda_{2\nu_2} \text{ gemäß (3.10) erklärt sind.} \end{cases}$$

[34]) Der Wert von $\lambda_{2\nu_2}$ hängt sogar nur vom Grad des Divisors ab; $\lambda_{2\nu_2}$ ist aber nicht auf den absoluten Betrag 1 normiert. — Man beachte die Analogie zu Größencharakteren vom Führer 1 im rationalen Zahlkörper.

[35]) Eventuell bei nicht symmetrisch erzeugbaren Funktionenkörpern. Zusatz bei der Korrektur: Diese Frage kann auf Grund eines neueren Ergebnisses des Verf. [Arch. Math. **6**, 266—274 (1955), insbes. S. 271] bejaht werden.

[36]) Es ist $\chi \times \lambda_c(\mathfrak{A}) = 0$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{A}$ nicht prim zum Führer $\mathfrak{f}(\chi)$ von χ ist, da in diesem Fall nach der üblichen Konvention $\chi(\mathfrak{A}) = 0$ gesetzt wird.

Es sei K_1' ein abelscher Erweiterungskörper von K_1 vom Grade m mit dem genauen Konstantenkörper $k^{(r)}$; dann ist

$$Z_{K_1'}(s) = \prod_{\chi} L_{K_1}(s|\chi),$$

wobei das Produkt über alle zur Erweiterung K_1' über K_1 gehörigen Kongruenzcharaktere läuft. Der Doppelkörper $K_1' \cdot K_2^{(r)}$ ist (im Sinne der Isomorphie) eine abelsche Erweiterung m-ten Grades von $K_1 \cdot K_2$, dessen Galoisgruppe zu der von K_1' über K_1 isomorph ist, und werde eine (abelsche) relative Konstantenerweiterung des Doppelkörpers $K_1 \cdot K_2$ genannt. Wie durch einfache Umrechnung zu bestätigen ist, kann die arithmetische Zetafunktion von $K_1' \cdot K_2^{(r)}$ durch die in der Form (3.14) geschriebene Zetafunktion von $K_1 \cdot K_2$ ausgedrückt werden; es ist

$$Z_{K_1' \cdot K_2^{(r)}}(s) = \prod_{\chi} L_{K_1}(s|\Lambda_2 \chi), \tag{3.15}$$

wobei Λ_2 gemäß (3.14) bestimmt ist und χ alle zur Erweiterung K_1' über K_1 gehörigen Kongruenzcharaktere durchläuft.

Im Fall eines Zahlkörpers $\varkappa$ sind die Kongruenzcharaktere ein Spezialfall der Größencharaktere. Nach dem Vorgang von A. Weil [9e] kann man noch allgemeinere Charakterfunktionen Λ einführen, die einerseits die Heckeschen Größencharaktere und andererseits die Artinschen Gruppencharaktere endlicher galoisscher Erweiterungen $\varkappa'$ von $\varkappa$ als Spezialfälle enthalten, und mit diesen Λ analog zu (3.13) L-Funktionen bilden, die in ein Potenzprodukt von Heckeschen L-Funktionen von Zwischenkörpern zwischen $\varkappa'$ und $\varkappa$ zerlegbar sind. Führt man analog zu (3.14) die speziellen Weilschen Charakterfunktionen $\Lambda_i(\mathfrak{A}) = \lambda_0(\mathfrak{A}) + \lambda_1(\mathfrak{A}) - \sum_{\nu_i=1}^{2g_i} \lambda_{i\nu_i}(\mathfrak{A})$ von $\varkappa$ ein, so wird aus (3.5) $Z_{K_i}^*(s) = L_{\varkappa}(s|\Lambda_i)$. Bei Verwendung dieser Bezeichnungen läßt sich eine weitere formale Analogie zwischen den Fällen (a) und (e) angeben.

Lemma 2. *Ist die arithmetische Zetafunktion eines arithmetischen Funktionenkörpers K_i einer Veränderlichen über $\varkappa$ (bei einer Erzeugung) in der Form $Z_{K_i}^*(s) = L_{\varkappa}(s|\Lambda_i)$ als L-Funktion zu einer geeigneten Weilschen Charakterfunktion Λ_i von $\varkappa$ darstellbar, so gilt (bei entsprechender Erzeugung) für die Zetafunktion jeder abelschen Konstantenerweiterung*[37]) *$\varkappa' \cdot K_i$ über $\varkappa'$ analog zu* (3.15)

$$Z_{K_i \varkappa'}^*(s) = \prod_{\chi} L_{\varkappa}(s|\Lambda_i \chi), \tag{3.16}$$

wobei das Produkt über alle zur Erweiterung $\varkappa'$ über $\varkappa$ gehörigen Kongruenzcharaktere läuft[38]).

[37]) Diese Konstantenerweiterung entspricht sinngemäß der relativen Konstantenerweiterung im Doppelkörperfall; ein Analogon zur absoluten Konstantenerweiterung des Galoisfeldes gibt es im Fall (a) naturgemäß nicht.

[38]) Der Beweis folgt aus der Tatsache, daß das Zerlegungsverhalten der Primdivisoren $\mathfrak{P}_0$ von $\varkappa$ mit dem ihrer Fortsetzungen $\mathfrak{P}_0'$ bei dieser Konstantenerweiterung übereinstimmt.

§ 4. Weitere Bemerkungen, insbesondere zum Invarianzproblem

4.1. *Auszeichnung von Erzeugungen.* Im Unterschied zu den Bemerkungen des vorigen Paragraphen treten beim Invarianzproblem, d.h. bei der Frage nach der Abhängigkeit der arithmetischen Zetafunktionen von der Erzeugung der Körper, zunächst Unterschiede zwischen den Fällen (a) und (e) auf. Während nämlich beim arithmetischen Funktionenkörper von $n \geqq 1$ Veränderlichen eine Abhängigkeit von n Größen $x_1, \ldots, x_n$ vorliegt (der Konstantenkörper $\varkappa$ ist ja invariant ausgezeichnet), ist im Fall (e) der gleichen Stufe, d.h. beim Funktionenkörper von $n+1$ Veränderlichen über einem Galoisfeld k, zunächst eine Abhängigkeit von $n+1$ Größen $x_1, \ldots, x_{n+1}$ vorhanden, da ja der erste Körper A_1 aus (0.3) in keiner Weise invariant ausgezeichnet ist. Man weiß jedoch: *Wurde der erste Teilkörper A_1 einmal (durch ein x_1) ausgezeichnet, so ändert sich die arithmetische Zetafunktion nicht, wenn man x_1 durch ein anderes $x_1' \in A_1$ ersetzt.*

Dies führt zu folgender Fragestellung: Kann im Fall (e) einer der möglichen Teilkörper A_1 oder kann allgemeiner überhaupt eine Erzeugung des Körpers invariant ausgezeichnet werden[39]? — Bei einem rationalen Funktionenkörper $k(x_1, \ldots, x_n)$ z.B. kann man die (rationale) Erzeugung durch Adjunktion von n algebraisch-unabhängigen Elementen zu k als in natürlicher Weise ausgezeichnet ansehen.

Dieser Gedankengang soll hier zunächst bei Doppelkörpern $K_1 \cdot K_2$ weiter verfolgt werden; wir setzen dabei voraus, daß der Konstantenkörper k entweder ein Galoisfeld oder ein Körper der Charakteristik 0, d.h. stets *vollkommen* ist [somit sind die Resultate auch im Fall (a) anwendbar]. Wegen der Vollkommenheit von k ist jede Komponente K_i separabel erzeugbar und es gibt mindestens eine Erzeugung der Form

$$(4.1)\quad \begin{cases} K_i = k(x_{i1}, x_{i2}), \\ x_{i2} \text{ separabel und algebraisch über } k(x_{i1}) \text{ mit } f_i(x_{i1}, x_{i2}) = 0; \end{cases}$$

die Erzeugung wird also durch eine Gleichung $f_i = 0$ beschrieben.

Die Zahl der möglichen Erzeugungen eines *Doppelkörpers* A schränken wir nun durch die folgenden (invarianten) Forderungen ein:

(I) A soll als Doppelkörper dargestellt sein.

(II) Jede Komponente K_i von A soll in der Form (4.1) erzeugt sein.

Wir lassen somit für A nur Erzeugung folgender Form zu:

$$(4.2)\quad \begin{cases} A = K_1 \cdot K_2 = k(x_{11}, x_{12}; x_{21}, x_{22}), \quad \text{wobei für } i = 1, 2 \\ K_i = k(x_{i1}, x_{i2}) \text{ separabel algebraisch über } k(x_{i1}) \text{ mit } f_i(x_{i1}, x_{i2}) = 0 \\ \text{und vom Geschlecht } p_i \text{ ist und jeweils } x_{1j}, x_{2l} \text{ algebraisch unabhängig sind.} \end{cases}$$

[39]) Einer solchen invariant ausgezeichneten Erzeugung würde ja eine ausgezeichnete arithmetische Zetafunktion entsprechen, die eine Invariante des Körpers wäre; dies bedeutete einen Ersatz für das in der Einleitung formulierte Invarianzproblem.

Es sei nun

$$(4.2')\quad \begin{cases} A = K_1' \cdot K_2' = k(x_{11}', x_{12}'; x_{21}', x_{22}'), \quad K_i' = k(x_{i1}', x_{i2}') \text{ separabel alge-} \\ \text{braisch über } k(x_{i1}') \text{ mit } f_i'(x_{i1}', x_{i2}') = 0 \text{ und vom Geschlecht } p_i' \\ (i = 1, 2),\ x_{1j}',\ x_{2l}' \text{ algebraisch unabhängig über } k^{40}), \end{cases}$$

eine zweite Darstellung des gleichen Körpers A als Doppelkörper $K_1' \cdot K_2'$. Dann ist

$$(4.3)\qquad x_{ij} = R_{ij}(x_{11}', x_{22}'; x_{21}', x_{22}') \qquad (i, j = 1, 2),$$

bzw.

$$(4.3')\qquad x_{ij}' = R_{ij}'(x_{11}, x_{12}; x_{21}, x_{22}) \qquad (i, j = 1, 2),$$

wobei die R_{ij} und R_{ij}' jeweils rationale Funktionen der angegebenen Argumente sind.

Tritt bei einer dieser Umformungen in R_{i1} und R_{i2} (i fest) jeweils nur ein Argumentpaar x_{jl}' auf, etwa x_{11}' und x_{12}', so sagen wir, K_i ist *ungemischt* durch K_1' bestimmt; anderenfalls sagen wir, K_i ist *gemischt* durch K_1' und K_2' bestimmt (entsprechend bei anderen Indizes und bei der umgekehrten Richtung). — Bei den obigen Voraussetzungen und Bezeichnungen gilt das folgende

Lemma 3[41]). *Ist K_i ungemischt durch K_j' bestimmt, so ist K_i ein Teilkörper von K_j', d.h. $K_i \subseteq K_j'$, und es ist $p_i \leqq p_j'$. Ist K_i gemischt durch K_1' und K_2' bestimmt, dann besitzt bei einer geeigneten Konstantenerweiterung $\tilde{k}$ von k sowohl $\tilde{K}_1'$ als auch $\tilde{K}_2'$ einen zu $\tilde{K}_i$ isomorphen Teilkörper, d.h. $p_i \leqq p_1'$ und $p_i \leqq p_2'$.*

Beweis. Die Enthaltenseinsaussage im ungemischten Fall ist trivial. — Im gemischten Fall treten in R_{i1} und R_{i2} aus jedem Argumentpaar (x_{11}', x_{12}') bzw. (x_{21}', x_{22}') mindestens ein x_{ij}' wirklich auf. Es gilt aber $f_i(R_{i1}, R_{i2}) = 0$ für alle „Parameter" x_{ij}', die die Gleichungen $f_1'(x_{11}', x_{12}') = 0$ und $f_2'(x_{21}', x_{22}') = 0$ erfüllen. Dann kann man Elemente α und β aus einer geeigneten endlich-algebraischen Erweiterung $\tilde{k}$ von k so wählen, daß $f_1'(\alpha, \beta) = 0$ und daß $R_{i1}^* = R_{i1}(\alpha, \beta; x_{21}', x_{22}')$ und $R_{i2}^* = R_{i2}(\alpha, \beta; x_{21}', x_{22}')$ nicht beide algebraisch über k sind, wenn x_{21}' und x_{22}' die Erzeugenden von K_2' sind. Die Elemente R_{i1}^* und R_{i2}^* genügen einerseits der erzeugenden Gleichung der Konstantenerweiterung $\tilde{K}_i$ über $\tilde{k}$ und sind andererseits über $\tilde{k}$ nicht beide algebraisch und in $\tilde{K}_2'$ enthalten; folglich besitzt $\tilde{K}_2'$ einen durch R_{i1}^* und R_{i2}^* erzeugten zu $\tilde{K}_i$ isomorphen Teilkörper. Entsprechend schließt man für $\tilde{K}_1'$ und $\tilde{K}_i$. — Die Geschlechtsabschätzungen folgen aus der Tatsache, daß ein separabler Teilkörper stets kleineres Geschlecht hat und daß ein rein inseparabler Teilkörper eines Funktionenkörpers einer Veränderlichen über einem Galoisfeld zu seinem Oberkörper isomorph ist[42]); hiermit ist Lemma 3 bewiesen. —

[40]) Die Striche bedeuten hier stets den Hinweis auf die zweite Erzeugung, d.h. f_i' ist nicht mit der Ableitung von f_i zu verwechseln, die in diesem Zusammenhang nicht vorkommt.

[41]) Dieses Lemma ist die Fortführung eines bei H. W. E. Jung [4] aufgezeichneten Beweisgedankenganges.

[42]) Nach einer brieflichen Mitteilung von F. K. Schmidt.

Hat ein Doppelkörper zwei verschiedene Erzeugungen, d.h. ist $A = K_1 \cdot K_2 = K_1' \cdot K_2'$, wobei nicht $K_1 = K_1'$ und $K_2 = K_2'$, so tritt in mindestens einer Übergangsrichtung eine gemischte Erzeugung auf[43]; o. B. d. A. sei also K_1 gemischt durch K_1' und K_2' bestimmt. Nach Lemma 3 gibt es dann eine geeignete Konstantenerweiterung, so daß sowohl $\tilde{K}_1'$ als auch $\tilde{K}_2'$ einen zu $\tilde{K}_1$ isomorphen Teilkörper haben. Bei der umgekehrten Richtung hänge o. B. d. A. K_1' von K_1 ab; dann existiert eine geeignete Konstantenerweiterung von k zu $\tilde{\tilde{k}}$, so daß $\tilde{\tilde{K}}_1 \cong \tilde{\tilde{K}}_1'$ und daß $\tilde{\tilde{K}}_2'$ einen zu $\tilde{\tilde{K}}_1'$ isomorphen Teilkörper besitzt. — Entweder hängt auch K_2' von K_1 ab, dann sind wegen Lemma 3 bei geeigneter Konstantenerweiterung alle vier Komponentenkörper zueinander isomorph, oder K_2' muß bei einer Konstantenerweiterung zu K_2 isomorph werden. — Ist schließlich $p_2 > p_1$, so folgt aus den Geschlechtsabschätzungen, daß $K_2 = K_2'$ sein muß.

Satz 4. *Ein Doppelkörper $A = K_1 \cdot K_2$ kann höchstens dann auf eine zweite Art als Doppelkörper erzeugt werden, wenn es eine endlich-algebraische Konstantenerweiterung von k zu $\tilde{k}$ und eine geeignete Numerierung der Komponentenkörper K_i gibt, so daß $\tilde{K}_1$ einen zu $\tilde{K}_2$ isomorphen Teilkörper enthält. In diesem Fall ist aber bei einer geeigneten Konstantenerweiterung $\tilde{K}_1 \cong \tilde{K}_1'$ und $\tilde{K}_2 \cong \tilde{K}_2'$; ist sogar $p_2 > p_1$, so ist stets $K_2 = K_2'$.*

Hieraus folgt: Nimmt man in die Definition der arithmetischen Zetafunktionen eines Doppelkörpers die Forderungen auf, daß nur Erzeugungen vom Typus (I), (II) zugelassen sind, so gehen alle derart definierten Zetafunktionen des Körpers bei geeigneter Konstantenerweiterung stets in die gleiche Funktion über, d.h. die arithmetische Zetafunktion ist zumindest eine Fastinvariante des Körpers.

Zur Frage der Vollinvarianz bleibt noch zu klären, ob es zwei Funktionenkörper einer Veränderlichen über k gleichen Geschlechts gibt, die bei einer Konstantenerweiterung zueinander isomorph werden, deren Zetafunktionen aber verschieden sind (d.h. bei denen sich die Nullstellen um Einheitswurzelfaktoren unterscheiden)[44].

4.2. *Spezielle Bewertungssysteme.* Eine andere Möglichkeit das Invarianzproblem in Angriff zu nehmen, besteht darin, die Struktur des in die Definition eingehenden speziellen Bewertungssystems zu untersuchen. Eine Untersuchung von speziellen Bewertungssystemen in Funktionenkörpern mehrerer Veränderlicher, d.h. von solchen Systemen, die nicht alle Bewertungen des Körpers enthalten, wurde für einrangige diskrete Bewertungen von KRULL [6b] durchgeführt; etwas davon abweichend ist das in der Arithmetik eines Doppelkörpers vorkommende Bewertungssystem (vgl. ROQUETTE [7a, b]).

---

[43]) Ist eine Richtung rein ungemischt, so muß nach Voraussetzung mindestens einmal echtes Enthaltensein auftreten, also die umgekehrte Richtung gemischt sein.

[44]) Zusatz bei der Korrektur: Solche Körper gibt es, wie vom Verf. neuerdings [Arch. Math. **6**, 271 (1955)] gezeigt werden konnte.

Welche Eigenschaften bei unserem speziellen 2-rangigen diskreten Bewertungssystemen ungefähr zu erwarten sind, wollen wir am Beispiel des rationalen Funktionenkörpers von zwei Veränderlichen über einem Galoisfeld skizzieren: 1. Alle Bewertungen bewerten den Konstantenkörper identisch. 2. Zu jedem nicht konstanten Element ξ gibt es mindestens eine Bewertung im System, bei der ξ nicht identisch bewertet wird (d.h. das Bewertungssystem ist *ausreichend*). 3. Jeder Bewertung ist invariant ein *Grad* $d(\mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}'_{1,2})$ zugeordnet (der Grad des Restklassenkörpers über dem Konstantenkörper). 4. Schreibt man die Werte der Bewertungen gemäß der Schachtelung $(\mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}'_{1,2})$ als geordnete Paare von ganzen Zahlen (a_1, b_2), so sind nur bei endlich vielen Paaren beide Komponenten von Null verschieden. 5. Bei festgehaltenem $\mathfrak{P}'_1$ gilt die modifizierte Summenregel

$$\sum_{\mathfrak{P}'_{1,2}} v_{\mathfrak{P}'_{1,2}}(\xi)\, d(\mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}'_{1,2}) = 0. \tag{4.4}$$

Literatur

[1] Chevalley, C.: Introduction to the Theory of Algebraic Functions of One Variable. Math. Surveys **6** (1951). — [2a] Deuring, M.: Reduktion algebraischer Funktionenkörper nach Primdivisoren des Konstantenkörpers. Math. Z. **47**, 643—654 (1942). — [2b] Deuring, M.: Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlechte Eins. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. **1953**, 85—94. — [3a] Hasse, H.: Über die Kongruenzzetafunktionen. Sitzgsber. Preuß. Akad. Wiss. **1934**, 250—263. — [3b] Hasse, H.: Zetafunktionen und L-Funktionen zu einem arithmetischen Funktionenkörper vom Fermatschen Typus. Abh. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. **1954**, Nr. 4. — [3c] Davenport, H., u. H. Hasse: Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktion in gewissen zyklischen Fällen. J. reine angew. Math. **172**, 151—182 (1934). — [3d] Hasse, H.: Zahlentheorie. Berlin 1951. — [3e] Hasse, H.: Gaußsche Summen zu Normalkörpern über endlich-algebraischen Zahlkörpern. Abh. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. **1952**, Nr. 1. — [4] Jung, H. W. E.: Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher. Berlin 1951. — [5a] Kähler, E.: Über rein algebraische Körper. Math. Nachr. Berlin **5**, 69—92 (1951). — [5b] Kähler, E.: Algebra und Differentialrechnung. Ber. Math. Tagung Berlin **1953**, 58—163. — [6a] Krull, W.: Idealtheorie. Ergebn. Math. Grenzgeb. **4**, Berlin 1935. — [6b] Krull, W.: Über geschlossene Bewertungssysteme. J. reine angew. Math. **190**, 75—92 (1951). — [7a] Roquette, P.: Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern. Arch. Math. **4**, 6—16 (1953). — [7b] Roquette, P.: Arithmetischer Beweis der Riemannschen Vermutung in Kongruenzfunktionenkörpern beliebigen Geschlechts. J. reine angew. Math. **191**, 199—252 (1953). — [8] Schmidt, F. K.: Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p. Math. Z. **33**, 1—32 (1931). — [9a] Weil, A.: Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent. Act. Scient. Ind. **1041** (1948). — [9b] Weil, A.: Numbers of solutions of equations in finite fields. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 497—508 (1949). — [9c] Weil, A.: Number-Theory and Algebraic Geometry. Proc. Int. Math. Congress Cambridge **1950**, 90—100. — [9d] Weil, A.: Jacobi sums as „Größencharaktere". Trans. Amer. math. Soc. **73**, 487—495 (1952). — [9e] Weil, A.: Sur la Théorie du Corps de Classes. J. Math. Soc Japan **3**, 1—35 (1951).

Würzburg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 2. Oktober 1954)

Laugwitz, D.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 72—78 (1956)

Über einen Abbildungssatz von B. Sz.-Nagy

Von
Detlef Laugwitz

Von Béla Szökefalvi-Nagy rührt der folgende Satz her:

Es sei eine Abbildung des n-dimensionalen euklidischen Raumes auf sich gegeben

$$f(x) = \lambda(x) \cdot x \quad (\lambda(rx) = \lambda(x) \text{ für } r > 0;\ \lambda(x) > 0 \text{ für } x \neq 0), \tag{1}$$

welche die Einheitskugel $|x| \leqq 1$ *in einen konvexen Körper K überführt. Dann ist* $f(x)$ *„dehnungsbeschränkt“:*

$$|f(x) - f(x')| \leqq M \cdot |x - x'|. \tag{2}$$

Vincze und Szüsz [4] haben diesen Satz zusammen mit der Tatsache, daß auch f^{-1} dehnungsbeschränkt ist, für euklidische Räume beliebiger (auch unendlicher) Dimension bewiesen. Haupt [1] hat gezeigt, daß für K in endlichdimensionalen euklidischen Räumen auch gewisse Sternbereiche zugelassen werden dürfen, und daß auf diese Weise dann alle dehnungsbeschränkten Abbildungen der Form (1) erhalten werden. V. L. Klee [2] hat die Resultate von Sz.-Nagy, Vincze und Szüsz nach einer anderen Richtung erweitert: Wenn die Abbildung f mit (1) in einem normierten Raume (endlicher oder unendlicher Dimension) einen beschränkten konvexen Körper mit 0 als Innenpunkt in einen anderen mit eben denselben Eigenschaften überführt, dann ist f dehnungsbeschränkt.

Wir werden hier einen Satz beweisen, der alle diese Resultate verallgemeinert[1]) und darüber hinaus eine Kennzeichnung der dehnungsbeschränkten Abbildungen (1) in beliebigen normierten Räumen gibt.

Eine Gerade in einem zweidimensionalen linearen Raum soll *freie Tangente* der Punktmenge M im Punkte x heißen, wenn sie Limes einer Folge von Verbindungsgeraden von Punkten $x_n \in M$, $x_n' \in M$ ist ($x_n \neq x_n'$, $x_n \to x$, $x_n' \to x$, $x \in M$; wegen des Limes einer Geradenfolge vgl. [1], p. 149, Anm. 7). *Tangentenmenge* einer Menge M in einem linearen Raum beliebiger (auch unendlicher) Dimension heiße die Punktmenge aus den Punkten aller freien Tangenten von $M \cap L$ in L, wo L alle *zwei*dimensionalen Unterräume durchläuft, welche 0 enthalten[2]). Eine Punktmenge S in einem linearen Raum beliebiger

[1]) Klee [2] behandelt auch den Fall unsymmetrischer Normen ($||rx|| = r \cdot ||x||$ für $r \geqq 0$), auf den wir hier nicht eingehen.

[2]) Für einen zweidimensionalen Raum sind Tangentenmenge und Paratingent [1] äquivalente Begriffe. Für Räume höherer Dimension kann man leicht Beispiele finden, die zeigen, daß die Tangentenmenge im allgemeinen eine echte Teilmenge des Paratingents ist.

Dimension heiße *stetig berandeter Sternbereich*, wenn sie mit jeder Geraden durch 0 eine abgeschlossene Strecke mit 0 als innerem Punkt gemeinsam hat, und wenn die Menge der Endpunkte aller dieser Strecken (der „*Rand*" von S) mit jedem zweidimensionalen linearen Unterraum durch 0 eine stetige Kurve gemeinsam hat[3]).

Alle vorkommenden Räume sind reelle lineare Räume mit mindestens zwei linear unabhängigen Elementen.

Satz. *Notwendig und hinreichend für die Dehnungsbeschränktheit der Abbildung*

$$(1) \quad f(x) = \lambda(x) \cdot x \quad \textit{mit} \quad \lambda(x) > 0 \quad \textit{für} \quad x \neq 0,\ \lambda(rx) = \lambda(x) \quad \textit{für} \quad r > 0$$

eines normierten Raumes auf sich und ihrer Inversen $f^{-1}(x) = \lambda^{-1}(x) \cdot x$ *ist die folgende Bedingung* **(B)**:

Es gibt zwei stetig berandete beschränkte Sternbereiche S_1, S_2 *(mit* 0 *als Innenpunkt), so daß* $f(S_1) = S_2$, *und Umgebungen* U_i $(i = 1, 2)$ *von* 0, *so daß die Tangentenmenge des Randes von* S_i *fremd zu* U_i *ist.*

Dem Beweis dieses Satzes schicken wir eine einfache Hilfsbetrachtung voraus[4]).

Lemma. *In jedem zweidimensionalen normierten* (Minkowskischen) *Raum* (*Norm* $\| \ \|$) *gibt es eine euklidische Metrik* (*Norm* $| \ |$) *mit*

$$\tfrac{1}{2}|x| \leqq \|x\| \leqq |x| \leqq 2\|x\|.$$

Beweis des Lemmas. Die konvexe Mittelpunktskurve $\|x\| = 1$ besitzt ein Paar konjugierter Durchmesser (vgl. etwa [3], p. 238), d.h. solcher Durchmesser, die in ihren Endpunkten Stütztangenten besitzen, die zum anderen Durchmesser des Paares parallel sind. Wir können die Halbmesser e_1, e_2 des Paares als Basisvektoren des affinen Koordinatensystems wählen. Dann erfüllt bei $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ die Norm

$$|x| = \sqrt{\tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}$$

die Ungleichung des Lemmas.

Wir zeigen jetzt:

Die Bedingung (B) des Satzes ist notwendig.

---

[3]) Dies bedeutet Stetigkeit des Randes bezüglich der feinsten Hausdorff-Topologie des Vektorraumes, eine Forderung, die schwächer ist als die Stetigkeit bezüglich einer Normtopologie.

[4]) Hier wie in den späteren Abschätzungen legen wir weniger Wert auf Angabe der besten Schranken als auf Kürze der Beweise und Übersichtlichkeit der Formeln. Nach einem Satz von F. John, Studies Essays pres. to R. Courant, 1948, 203, läßt sich zu jeder Norm $||x||$ im n-dimensionalen Raum eine euklidische Norm $|x|$ sogar so finden, daß $||x|| \leqq |x| \leqq \sqrt{n} \cdot ||x||$. Der Eichkörper der eindeutig bestimmten bestapproximierenden euklidischen Norm ist übrigens homothetisch zum Loewner-Ellipsoid des Eichkörpers $\{x;\ ||x|| \leqq 1\}$.

Dazu genügt es zu zeigen: Wenn $f(x)$ und $f^{-1}(x)$ dehnungsbeschränkt sind, d.h. wenn

$$(3) \qquad 0 < m \leqq \frac{\|f(x) - f(x')\|}{\|x - x'\|} \leqq M < \infty \qquad (x \neq x'),$$

dann ist **(B)** erfüllt mit $S_1 = \{x; \|x\| \leqq 1\}$ und $S_2 = \{f(x); \|x\| \leqq 1\}$.

Für S_1 sind offenbar alle Forderungen erfüllt.

Aus (3) folgt, daß S_2 beschränkt ist, 0 als Innenpunkt enthält und stetig berandet ist.

Wir beweisen nun die Existenz eines $\mu > 0$, so daß kein Punkt x mit $\|x\| \leqq \mu$ zur Tangentenmenge des Randes von S_2 gehört. Zunächst folgt unschwer, daß keine freie Tangente durch 0 gehen kann.

Nehmen wir nun an, die freie Tangente g habe den Abstand $d > 0$ vom Nullpunkt. Wir betrachten die zweidimensionale Ebene, in der g und 0 liegen; $|\ |$ sei eine nach dem Lemma bestimmte euklidische Metrik in dieser Ebene mit dem Skalarprodukt (x, y), $(x, x) = |x|^2$. Dann gilt für die Folgen $x_n \to x$, $x_n' \to x$ aus der Definition der freien Tangente (wenn δ_n den euklidischen Abstand, d_n den Abstand im Sinne der Norm $\|\ \|$ der n-ten Näherungsgeraden, d.h. der Geraden durch x_n und x_n' vom Nullpunkt 0 bezeichnet):

$$M \geqq \frac{f(x_n) - f(x_n')}{\|x_n - x_n'\|} \geqq \frac{1}{2} \frac{|f(x_n) - f(x_n')|}{|x_n - x_n'|} = \frac{1}{2} \frac{|f(x_n)| \cdot |f(x_n')|}{\delta_n} \cdot \left(\frac{x_n + x_n'}{2}, x_n\right)$$

$$\geqq \frac{1}{4} \frac{\|f(x_n)\| \cdot \|f(x_n')\|}{d_n} \cdot \left(\frac{x_n + x_n'}{2}, x_n\right) \geqq \frac{1}{4} \frac{m^2}{d_n} \left(\frac{x_n + x_n'}{2}, x_n\right).$$

Für $n \to \infty$ strebt die rechte Seite gegen $\frac{m^2}{4d}$, woraus folgt

$$d \geqq \frac{m^2}{4M};$$

$\mu = \frac{m^2}{4M}$ erfüllt also unsere Bedingung. — Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung **(B)** bewiesen. —

Die Bedingung (B) ist hinreichend.

Wir setzen also voraus:

$$(4) \qquad m \cdot \|x\| \leqq \|f(x)\| \leqq M \cdot \|x\|, \qquad 0 < m \leqq M < \infty \quad \text{und:}$$

Für die untere Grenze μ_i der Abstände der 0 von den freien Tangenten des Randes von S_i gilt $\mu_i > 0$ $(i = 1, 2)$. —

Wir führen den Beweis nacheinander zunächst für gewisse Spezialfälle.

(I) *Die Norm ist euklidisch,* $\|x\|^2 = (x, x)$, $S_1 = \{x; \|x\| \leqq 1\}$.

Für linear abhängige Vektoren x_1, x_2 gilt wegen (4):

$$(I, 1) \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| \leqq M \cdot \|x_1 - x_2\|; \quad \|x_1 - x_2\| \leqq \frac{1}{m} \|f(x_1) - f(x_2)\|.$$

Es seien jetzt x_1, x_2 linear unabhängige Einheitsvektoren, E die von ihnen aufgespannte Ebene, g die Verbindungsgerade von $f(x_1)$ und $f(x_2)$, d deren Abstand von 0. Alle Winkel beziehen wir auf das Lot von 0 auf g. Es sei β_i der Winkel der Richtung x_i, so daß also gilt $|\beta_i| \leq \frac{\pi}{2}$, $|\beta_1 - \beta_2| < \pi$.

Aus

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|^2 = \lambda^2(x_1) + \lambda^2(x_2) - 2\lambda(x_1)\lambda(x_2) \cdot (x_1, x_2)$$

folgt

$$\begin{aligned}(\lambda(x_1) - \lambda(x_2))^2 &= \|f(x_1) - f(x_2)\|^2 - 2\lambda(x_1)\lambda(x_2)\left(1 - \cos(\beta_2 - \beta_1)\right) \\ &= \|f(x_1) - f(x_2)\|^2 - 4\lambda(x_1)\lambda(x_2)\sin^2\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}.\end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned}\|f(x_1) - f(x_2)\| \cdot d &= \lambda(x_1)\lambda(x_2) \cdot \sin|\beta_2 - \beta_1| \\ &= 2\lambda(x_1)\lambda(x_2) \cdot \sin\frac{|\beta_2 - \beta_1|}{2} \cdot \cos\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}.\end{aligned}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

$$\left|\frac{\lambda(x_2) - \lambda(x_1)}{\beta_2 - \beta_1}\right|^2 = \frac{\lambda^2(x_1)\lambda^2(x_2)}{d^2}\cos^2\frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \sin^2\frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \cdot \left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right)^{-2} -$$

$$- 4\lambda(x_1)\lambda(x_2)\sin^2\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}(\beta_2 - \beta_1)^{-2},$$

also

$$\text{(I, 2)} \qquad \left|\frac{\lambda(x_1) - \lambda(x_2)}{\beta_1 - \beta_2}\right|^2 \leq \lambda^2(x_1)\lambda^2(x_2)\frac{\cos^2\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}{d^2}.$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle a) und b):

a) β_1 und β_2 haben verschiedene Vorzeichen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an: $0 \leq -\beta_1 \leq \beta_2$. Dann ist wegen

$$0 \leq -\beta_1 \leq \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \leq \frac{\pi}{2}:$$

$$\frac{d}{\cos\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}} \geq \frac{d}{\cos\beta_1} = \lambda(x_1) = \|f(x_1)\| \geq m.$$

Also gilt in diesem Falle wegen (I, 2)

$$\text{(I, 3)} \qquad \left|\frac{\lambda(x_1) - \lambda(x_2)}{\beta_1 - \beta_2}\right|^2 \leq \frac{M^4}{m^2}.$$

b) β_1 und β_2 haben nicht verschiedene Vorzeichen, $|\beta_2| \geq |\beta_1|$.

In diesem Falle betrachten wir einen Zwischenwinkel mit zugehörigem Einheitsvektor x_0, so daß es in $f(x_0)$ eine zu g parallele freie Tangente des Randes von S_2 gibt. (Die Existenz eines solchen Zwischenpunktes folgt aus der Stetigkeit des Randes von $S_2 \cap E$.) Diese freie Tangente habe den

Abstand d' von 0, $d' \geqq \mu_2$. Wegen $|\beta_i| < \frac{\pi}{2}$ folgt

$$\frac{d'}{d} = \frac{\cos\vartheta}{\cos\beta_1} \cdot \frac{\lambda(x_0)}{\lambda(x_1)} \leqq 1 \cdot \frac{M}{m}, \quad \text{also} \quad d \geqq \frac{m\,\mu_2}{M}.$$

Einsetzen in (I, 2) ergibt

$$\text{(I, 4)} \qquad \left|\frac{\lambda(x_1) - \lambda(x_2)}{\beta_1 - \beta_2}\right|^2 \leqq \frac{M^6}{\mu_2^2\, m^2}.$$

Wegen $M \geqq \mu_2$ gilt in beiden Fällen a) und b) nach (I, 3) die Abschätzung (I, 4).

Wir verwenden jetzt für unseren zweidimensionalen euklidischen Raum E den Satz 1 der Arbeit [4]:

Wenn $0 < m \leqq \lambda(x) \leqq M < \infty$, $\lambda(r \cdot x) = \lambda(x)$ für $r \geqq 0$, und

$$\left|\frac{\lambda(x_1) - \lambda(x_2)}{\beta_1 - \beta_2}\right| \leqq L < \infty,$$

dann gilt[5])

$$\text{(I, 5)} \qquad \frac{m}{1 + \frac{\pi L}{m}} \leqq \frac{\|f(x') - f(x)\|}{\|x' - x\|} \leqq M + \pi L.$$

Die Voraussetzungen dieses Satzes sind bei uns erfüllt mit

$$\text{(I, 6)} \qquad L = \frac{M^3}{m \cdot \mu_2}.$$

Die Schranken in (I, 5) sind unabhängig von der speziellen Wahl von x, x', und daher sind f und f^{-1} dehnungsbeschränkt.

$$\text{(II)} \qquad \|x\|^2 = (x, x); \quad S_1 \textit{ und } S_2 \textit{ beliebig gemäß } \textbf{(B)}.$$

Diesen Fall führen wir auf (I) zurück. Es sei f_i die in allen Richtungen homothetische [d.h. Form (1)!] Abbildung des Eichkörpers $\{x; \|x\| \leqq 1\}$ auf S_i $(i = 1, 2)$; dann sind nach (I) die Abbildungen f_i, f_i^{-1} sämtlich dehnungsbeschränkt, also sind auch $f = f_2\, f_1^{-1}$ und $f^{-1} = f_1\, f_2^{-1}$ dehnungsbeschränkt, w. z. b. w.

$$\text{(III)} \qquad \|\ \| \textit{ beliebige Norm}, \; S_1 = \{x; \|x\| \leqq 1\}.$$

E sei wieder die von den beiden beliebig gewählten linear unabhängigen Vektoren x_1, x_2 aufgespannte Ebene. Nach dem Lemma können wir in E eine euklidische Norm $|\ |$ einführen mit

$$\tfrac{1}{2}\,|x| \leqq \|x\| \leqq |x| \leqq 2\,\|x\|.$$

[5]) An dieser Stelle befindet sich in der Arbeit [4] ein Druckfehler: An Stelle von $\frac{m}{1 + \frac{\pi}{mL}} \leqq \cdots$ ist zu lesen $\frac{m}{1 + \frac{\pi L}{m}} \leqq \cdots$, wie aus dem letzten Teil des Beweises zu Satz 1 der Arbeit [4] auf S. 99 hervorgeht.

Um (I, 5) anwenden zu können, betrachten wir die beiden Abbildungen f_i der Form (1), die $\{x; |x| \leq 1\}$ in S_i überführen $(i = 1, 2)$. Für $f_1(x) = \frac{|x|}{\|x\|} x$ ist in (I, 5), (I, 6) einzusetzen: $M = 2$, $m = \mu_2 = 1$, so daß sich ergibt:

$$\text{(III, 1)} \qquad a_1 = \frac{1}{1 + 8\pi} \leq \frac{|f_1(x') - f_1(x)|}{|x' - x|} \leq 2 + 8\pi = A_1.$$

Für $f_2(x) = \frac{|x|}{x} f(x)$ gilt $m \cdot |x| \leq |f_2(x)| \leq 2M \cdot |x|$ und für die untere Grenze μ_2' der Abstände der freien Tangenten von S_2 vom Nullpunkt:

$$\mu_2 \leq \mu_2' \leq 2 \cdot \mu_2.$$

Die Anwendung von (I, 5), (I, 6) ergibt hier

$$\text{(III, 2)} \qquad a_2 = \frac{m}{1 + \frac{8\pi M^3}{m \mu_2}} \leq \frac{|f_2(x') - f_2(x)|}{|x' - x|} \leq 2M + \frac{8M^3 \pi}{m \mu_2} = A_2.$$

Da $f(x) = f_2(f_1^{-1}(x))$, erhält man

$$\frac{f(x') - f(x)}{\|x' - x\|} \leq 2 \frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|} = 2 \frac{|f_2(f_1^{-1}(x')) - f_2(f_1^{-1}(x))|}{|f_1^{-1}(x') - f_1^{-1}(x)|} \cdot \frac{|f_1^{-1}(x') - f_1^{-1}(x)|}{|x' - x|} \leq 2 \frac{A_2}{a_1}$$

und entsprechend

$$\frac{\|f(x') - f(x)\|}{\|x' - x\|} \geq \frac{1}{2} \frac{a_2}{A_1}.$$

Da die Schranken nur von M, m, μ_2, aber nicht von der speziellen Wahl der Ebene abhängen, ist damit die Dehnungsbeschränktheit von f, f^{-1} bewiesen.

(IV) $\| \|, S_1, S_2$ *beliebig der Bedingung* **(B)** *gemäß.*

Diesen allgemeinen Fall erledigt man nun mühelos unter Verwendung von (III) analog zum Beweisschritt (II).

Damit ist gezeigt, daß die Bedingung **(B)** auch hinreichend ist.

Wir bezeichnen im folgenden mit $\mathfrak{S}$ die Gesamtheit derjenigen stetig berandeten beschränkten Sternbereiche in einem beliebigen (aber fest gewählten) normierten Raum, zu denen es eine zur Tangentenmenge des Randes fremde Umgebung des Nullpunkts gibt. Dann folgt aus dem Beweis noch als

Korollar 1. *Eine dehnungsbeschränkte Abbildung* (1) *eines normierten Raumes auf sich, deren Umkehrung ebenfalls dehnungsbeschränkt ist, bildet die Menge* $\mathfrak{S}$ *auf sich ab.*

Beweis. Es sei $S_1 \in \mathfrak{S}$. Wir zeigen zunächst, daß auch $S_2 = f(S_1)$ zu $\mathfrak{S}$ gehört; f_i $(i = 1, 2)$ sei wieder die durch

$$f_i\{x; \|x\| \leq 1\} = S_i$$

definierte Abbildung der Form (1). Dann gilt $f_2 = f f_1$, $f_2^{-1} = f_1^{-1} f^{-1}$. f ist nach Voraussetzung dehnungsbeschränkt, ebenso f^{-1}; f_1 und f_1^{-1} sind nach unserem Satz dehnungsbeschränkt, weil $S_1 \in \mathfrak{S}$. Also sind auch f_2 und f_2^{-1} dehnungsbeschränkt, und aus dem obigen Beweis dafür, daß die Bedingung **(B)** not-

wendig ist, folgt $S_2 \in \mathfrak{S}$. — Nun bleibt noch zu zeigen, daß jedes $S' \in \mathfrak{S}$ als Bild $f(S)$ eines $S \in \mathfrak{S}$ auftritt. Da f^{-1} als dehnungsbeschränkt vorausgesetzt ist, gilt nach dem eben Bewiesenen aber tatsächlich $f^{-1}(S') = S \in \mathfrak{S}$, womit alles bewiesen ist.

HAUPT [*1*] hat eine Kennzeichnung derjenigen Bereiche im euklidischen Raum angegeben, die als in allen Richtungen homothetische Bilder der Vollkugel auftreten. Wir erhalten hier allgemeiner:

Korollar 2. *Notwendig und hinreichend dafür, daß S Bild von $\{x; \|x\| \leq 1\}$ bei einer in allen Richtungen homothetischen, zusammen mit ihrer Umkehrung dehnungsbeschränkten Abbildung des normierten Raumes auf sich sei, ist $S \in \mathfrak{S}$.*

Literatur

[*1*] HAUPT, O.: Bemerkung zu einem Abbildungssatz von Herrn BÉLA SZ.-NAGY. Sitzgsber. math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1951**, 147—161 (1952). — [*2*] KLEE, V. L.: On a theorem of BÉLA SZ.-NAGY. Amer. Math. Monthly **60**, 618—619 (1953). — [*3*] LAUGWITZ, D.: Konvexe Mittelpunktsbereiche und normierte Räume. Math. Z. **61**, 235—244 (1954). — [*4*] VINCZE, ST., u. P. SZÜSZ: Beweis eines Abbildungssatzes von BÉLA SZ.-NAGY. Acta Sci. Math. Szeged **14**, 96—100 (1951).

Göttingen, Nußanger 70

(Eingegangen am 9. April 1955)

Ringel, G.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 79—102 (1956)

Teilungen der Ebene durch Geraden oder topologische Geraden*)

Herrn E. Sperner zum 50. Geburtstag am 9. Dezember 1955 gewidmet

Von

Gerhard Ringel

Einleitung

Die euklidische Ebene wird durch m Geraden dann und nur dann in möglichst viele Zellen zerlegt, wenn diese m Geraden sich paarweise schneiden und alle ihre $\binom{m}{2}$ Schnittpunkte verschieden sind. Solche m Geraden bilden eine *einfache Konfiguration*; wir sagen auch, sie haben *allgemeine Lage*. Wie J. Steiner[1]) bemerkte, wird die Ebene durch die m Geraden g_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ einer einfachen Konfiguration $\mathfrak{K}$ in genau $\frac{m(m+1)}{2}+1$ Zellen Z_i $\left(i=1, 2, \ldots, \frac{m(m+1)}{2}+1\right)$ zerlegt, von denen $2m$ unbeschränkt sind. Die gegenseitige Lage dieser Zellen kann man in folgender Weise kombinatorisch beschreiben. Es sei jede Gerade g_k mit einer Richtung (Orientierung) versehen, damit wir in bezug auf jedes g_k von einer rechten und einer linken Halbebene sprechen können. Der betrachteten einfachen Konfiguration $\mathfrak{K}$ wird nun eine rechteckige Matrix $S=(e_{ik})$ zugeordnet, wobei $e_{ik}=+1$ oder -1 zu setzen ist, je nachdem die Zelle Z_i rechts oder links von der Geraden g_k liegt. Wie üblich sei k der Spaltenindex, so daß jede Zelle durch eine Zeile von S repräsentiert wird (vgl. Fig. 1, S. 84).

Zwei einfache Konfigurationen heißen *äquivalent*, wenn die beiden zugehörigen Matrizen durch mehrmaliges Ausführen der drei folgenden Operationen zur Übereinstimmung gebracht werden können.

1. Vertauschung zweier Zeilen,
2. Vertauschung zweier Spalten,
3. Multiplikation einer Spalte mit -1.

So geht z.B. eine einfache Konfiguration durch Spiegelung an einer Geraden in eine äquivalente über. Da dieser Äquivalenzbegriff reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, führt er zu einer Klasseneinteilung aller einfachen Konfigurationen. Es sei hier bemerkt, daß die Anzahl A_m dieser Klassen für

*) Diese Arbeit wurde angeregt und in fruchtbaren Gesprächen beeinflußt durch Herrn E. Sperner.

[1]) Steiner, J.: Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes. Crelles J. reine u. angew. Math. 1, 349—364 (1826). Ges. Werke I, S. 77—94. Berlin 1881.

$m \leqq 7$ durch R. KLEE[2]) bestimmt worden ist. Er fand die Werte

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1, \quad A_5 = 6, \; A_6 = 43, \; A_7 = 922.$$

Das Problem, einen systematischen Überblick über alle nicht äquivalenten einfachen Konfigurationen zu erhalten, wird durch einen bisher unbemerkt gebliebenen Umstand außerordentlich erschwert. Es stellt sich nämlich in § 4 heraus, daß die ebenen Schließungssätze nicht ohne Einfluß auf die einfachen Konfigurationen sind. Um diesen Zusammenhang zu erkennen und zu erforschen, ist es zweckvoll, zunächst die einfachen Konfigurationen etwas zu verallgemeinern, indem man auch „verbogene" Geraden zuläßt. Eine doppelpunktfreie Kurve heißt *Pseudogerade*[3]), wenn sie aus einer Geraden g dadurch hervorgeht, daß man eine endliche Teilstrecke von g durch einen einfachen Bogen[4]) ersetzt, dessen Endpunkte mit denen der Teilstrecke übereinstimmen. m Pseudogeraden, von denen sich je zwei in genau einem Punkte schneiden, bilden eine *einfache Konfiguration von Pseudogeraden*, wenn ihre $\binom{m}{2}$ Schnittpunkte alle verschieden sind. Für diese naheliegende Verallgemeinerung der einfachen Konfigurationen läßt sich der oben definierte Äquivalenzbegriff sofort übertragen. Eine kombinatorische Kennzeichnung der durch einfache Konfigurationen von Pseudogeraden realisierbaren Matrizen wird in dieser Arbeit durchgeführt. Das Ergebnis wird in Satz 1 am Ende der Einleitung formuliert und in den §§ 1 bis 3 bewiesen.

Wir sagen, eine einfache Konfiguration von Pseudogeraden läßt sich *strecken*, wenn eine zu ihr äquivalente aus lauter Geraden bestehende einfache Konfiguration existiert. Wir stellen die Frage: *Kann man jede einfache Konfiguration von m Pseudogeraden strecken?* Für niedrige Zahlen m ist sie ohne weiteres zu bejahen. R. KLEE behauptete dies sogar allgemein. Indessen ist sein Beweis nach F. LEVI „nicht völlig überzeugend". Die überraschende Antwort auf die gestellte Frage ist jedoch verneinend, was im § 4 durch Beispiele, bei denen Schließungssätze eine Rolle spielen, demonstriert wird. Einige offene Fragen, die sich auch auf die geradlinige Realisierbarkeit beziehen, werden am Ende der Arbeit aufgezählt.

Wir betrachten hier ausnahmslos nur rechteckige Matrizen, die aus Zahlen $+1$ oder -1 gebildet sind. Eine solche Matrix S fassen wir stets als Zeilenmenge auf, d.h. von der speziellen Reihenfolge der Zeilen sehen wir ab. An Stelle von Matrix verwenden wir des öfteren auch das Wort Schema. Die Zeilen werden als Vektoren geschrieben; z.B.

$$\mathfrak{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}, \quad -\mathfrak{a} = \{-a_1, -a_2, \ldots, -a_m\}.$$

[2]) KLEE, R.: Über die einfachen Konfigurationen der euklidischen und projektiven Ebene. Dresden: Focken und Oltmanns 1938.

[3]) Die Ergebnisse dieser Arbeit ändern sich nicht, wenn man noch allgemeiner topologische Geraden zuläßt. *Topologische Gerade* ist das Bild einer Geraden bei einer topologischen Abbildung der Ebene auf sich. Die Beweise sind jedoch gelegentlich bequemer, wenn man Pseudogeraden verwendet.

[4]) Topologisches Bild einer Strecke.

Eine Zeile $\mathfrak{a}$ von S heiße *unbeschränkt* in S, wenn auch die Zeile $-\mathfrak{a}$ in S liegt. Mit $U(S)$ wird die Untermenge aller unbeschränkten Zeilen von S bezeichnet. Wenn ein Schema S so beschaffen ist, daß stets genau q verschiedene Zeilen übrig bleiben, wenn man alle bis auf p beliebige Spalten in S streicht, so sagen wir, S hat die *Eigenschaft* $[p, q]$. Ein Schema S heiße *realisierbar*, wenn eine zugehörige einfache Konfiguration von Pseudogeraden existiert. Nun können wir das Hauptergebnis der Arbeit aussprechen in

Satz 1. *Notwendig und hinreichend für die Realisierbarkeit eines Schemas S mit einer Spaltenanzahl $\neq 4$ ist die gleichzeitige Gültigkeit der drei Bedingungen:*

I. Das Schema S hat die Eigenschaft $[3, 7]$.

II. Das Schema $U(S)$ hat die Eigenschaft $[3, 6]$.

III. Wenn man zu S eine Zeile $\notin S$ hinzufügt, so wird die Eigenschaft $[3, 7]$ *verletzt, d.h. S ist bezüglich der Eigenschaft* $[3, 7]$ *maximal.*

§ 1. Über realisierbare Schemata

Es sei $\mathfrak{K}$ eine einfache Konfiguration mit den m Pseudogeraden $g_1, \ldots, g_m$ und S die zugehörige Matrix. Wenn wir in $\mathfrak{K}$ etwa die letzte Pseudogerade g_m entfernen, so erhalten wir eine einfache Konfiguration $\mathfrak{K}'$ mit $m-1$ Pseudogeraden. Die zugehörige Matrix S' entsteht natürlich aus S, indem man die letzte Spalte streicht und danach jede etwa doppelt vorkommende Zeile nur einmal zählt. Streicht man also nacheinander $m-3$ beliebige Spalten aus S, so bleibt eine durch drei Pseudogeraden realisierbare Matrix übrig. Eine einfache Konfiguration von drei Pseudogeraden zerlegt die euklidische Ebene in sieben Gebiete. Hiermit ist die Bedingung I von Satz 1, d.h. die Eigenschaft $[3, 7]$ als notwendig für die Realisierbarkeit von S erkannt.

Wenn D ein rechteckiges Schema ist, so bezeichnen wir allgemein das aus D durch Streichung der ersten bzw. letzten Spalte hervorgehende Schema mit $'D$ bzw. D'. Für die Zeilen benützen wir analoge Bezeichnungen:

$$\mathfrak{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m\} = \{\mathfrak{a}', a_m\} = \{a_1, {}'\mathfrak{a}\},$$
$$\mathfrak{a}' = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}\}, \qquad {}'\mathfrak{a} = \{a_2, \ldots, a_m\}.$$

Wir schreiben spezielle Zeilen, z.B. $\{+1, +1, +1, -1, +1\}$, meist in der kürzeren Form $\{+++-+\}$. Die in der Einleitung gegebene kombinatorische Definition der unbeschränkten Zeilen eines Schemas wird nun gerechtfertigt durch

Satz 2. *$\mathfrak{K}$ sei eine einfache Konfiguration von m Pseudogeraden mit dem zugehörigen Schema S. Jeder unbeschränkten Zelle der Zerlegung der Ebene durch $\mathfrak{K}$ entspricht eine unbeschränkte Zeile von S und umgekehrt.*

Beweis. Es sei P_1 ein Punkt einer unbeschränkten Zelle. Deren Rand enthält einen Halbstrahl h, der zu einer Pseudogeraden g von $\mathfrak{K}$ gehört. Einen Punkt $Q_1 \in h$ verbinden wir mit P_1 durch einen einfachen Bogen b_1, der mit $\mathfrak{K}$ keinen Schnittpunkt außer Q_1 hat. Auf g wählen wir derart einen weiteren Punkt Q_2, daß alle $m-1$ Schnittpunkte von g mit den übrigen

$m-1$ Pseudogeraden von $\mathfrak{R}$ im Innern des durch Q_1 und Q_2 bestimmten Teilbogens b von g liegen. In einer ε-Umgebung von Q_2 wählen wir einen Punkt $P_2 \notin g$, der nicht auf derselben Seite (Pseudohalbebene) von g liegt wie P_1. Wenn ε klein genug ist, läßt sich Q_2 und P_2 durch einen Bogen b_2 verbinden, der mit $\mathfrak{R}$ nur den einzigen Schnittpunkt Q_2 hat. Der hiermit konstruierte Weg längs b_1, b, b_2 führt von P_1 zu P_2 und überschreitet dabei jede der m Pseudogeraden genau einmal. P_1 und P_2 liegen daher in verschiedenen Zellen, denen reziproke Zeilen $\mathfrak{a}$ und $-\mathfrak{a}$ von S zugeordnet sind. Einer unbeschränkten Zelle entspricht also eine unbeschränkte Zeile von S.

Nun wollen wir umgekehrt aus $\mathfrak{a}, -\mathfrak{a} \in S$ die Unbeschränktheit der Zelle $\mathfrak{a}$ der Zerlegung durch $\mathfrak{R}$ folgern. Für ein zweispaltiges Schema ist das richtig. Es sei für $(m-1)$-spaltige Schemata schon bewiesen. Für ein m-spaltiges Schema S nehmen wir gegenteilig an, daß $\mathfrak{a} = \{+ + \cdots + +\}$, $-\mathfrak{a} \in S$, aber die Zelle $\mathfrak{a}$ beschränkt sei. Entfernen wir aus $\mathfrak{R}$ etwa die letzte Pseudogerade g_m, so erhalten wir eine einfache Konfiguration $\mathfrak{R}'$ von $m-1$ Pseudogeraden mit dem Schema S'. In der Zerlegung durch $\mathfrak{R}'$ sei die Zelle $\mathfrak{a}'$ beschränkt. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $-\mathfrak{a}' = (-\mathfrak{a})' \notin S'$, folglich auch $-\mathfrak{a} \notin S$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher ist die Zelle $\mathfrak{a}'$ unbeschränkt und wird somit durch g_m in die beschränkte Zelle $\mathfrak{a}$ und die notwendigerweise unbeschränkte Zelle $\mathfrak{b} = \{+ + \cdots + -\}$ zerlegt; daher $\mathfrak{b}$, $-\mathfrak{b} \in S$. Diese Überlegung gilt auch, wenn wir an Stelle der m-ten Spalte eine beliebige betrachten. Wir führen diesen Schluß etwa bezüglich jeder der drei letzten Spalten durch und erhalten in S die vier Zeilen

$$\begin{array}{l} + + \cdots + + + \\ + + \cdots + + - \\ + + \cdots + - + \\ + + \cdots - + + \end{array}$$

und die vier dazu reziproken. Wenn man die ersten $m-3$ Spalten streicht, bleiben diese acht Zeilen verschieden entgegen der schon bewiesenen Eigenschaft [3, 7] von S. Die Annahme, daß die Zelle $\mathfrak{a}$ beschränkt ist, führt also zum Widerspruch. Satz 2 ist bewiesen.

Satz 3. *Für ein realisierbares Schema S gilt $U(S)' = U(S')$.*

Beim Beweis beachten wir, daß das kombinatorisch definierte Schema $U(S)$ nach Satz 2 auch als die Menge aller Zeilen, die unbeschränkten Zellen entsprechen, aufgefaßt werden kann. In jeder unbeschränkten Zelle der Zerlegung durch $\mathfrak{R}'$ liegt eine unbeschränkte Zelle der Zerlegung durch $\mathfrak{R}$, d.h. $U(S') \subset U(S)'$. Die umgekehrte Relation folgt kombinatorisch: Aus $\mathfrak{a}' \in U(S)'$ folgt $\mathfrak{a} \in U(S)$, also $\mathfrak{a}, -\mathfrak{a} \in S$ und $\mathfrak{a}', -\mathfrak{a}' \in S'$, daher $\mathfrak{a}' \in U(S')$.

Entsprechend der anschaulichen Bedeutung heißen zwei Zeilen *benachbart*, wenn sie sich nur in einer einzigen Komponente unterscheiden.

Satz 4. *Wenn in einer realisierbaren Matrix S zwei Zeilen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ vorkommen, die sich in genau zwei Komponenten unterscheiden, so existiert in S auch eine „Zwischenzeile" $\mathfrak{c}$, die zu $\mathfrak{a}$ und zu $\mathfrak{b}$ benachbart ist.*

Beweis. $\mathfrak{N}$ sei eine durch die m Pseudogeraden $g_1, g_2, \ldots, g_m$ gebildete einfache Konfiguration mit der zugehörigen Matrix S, die etwa die Zeilen $\mathfrak{a} = \{+++\cdots+\}$ und $\mathfrak{b} = \{--+\cdots+\}$ enthalten möge. Von einem Punkt P aus der Zelle $\mathfrak{a}$ zu einem Punkt Q aus der Zelle $\mathfrak{b}$ sei ein einfacher Bogen b gezogen, der mit $\mathfrak{N}$ zwar möglichst wenig Punkte gemein hat, aber durch keinen der $\binom{m}{2}$ Schnittpunkte von $\mathfrak{N}$ gehen soll. b hat mit $g_3, g_4, \ldots, g_m$ keinen Schnittpunkt, weil P und Q in derselben Zelle der von $g_3, g_4, \ldots, g_m$ gebildeten Konfiguration liegen. Mit g_1 und g_2 hat b nur je einen Schnittpunkt, sonst könnte man die Anzahl der Schnittpunkte von b mit $\mathfrak{N}$ durch passende Deformation von b verringern. Der Bogen b muß also durch eine Zelle hindurchgehen, dessen zugehörige Zeile $\mathfrak{c}$ zu $\mathfrak{a}$ und zu $\mathfrak{b}$ benachbart ist.

Wir wollen jetzt zeigen, daß auch die Bedingungen II und III von Satz 1 der Einleitung für die Realisierbarkeit eines Schemas notwendig sind.

Zu II. Es ist zu beweisen, daß $U(S)$ die Eigenschaft [3, 6] hat, wenn S realisierbar ist. Für ein Schema mit höchstens drei Spalten stimmt dies. Es sei für alle $(m-1)$-spaltigen Schemata schon bewiesen $(m \geqq 4)$. Streichen wir in $U(S)$ eine Spalte, so erhalten wir nach Satz 3 ein Schema $U(S)' = U(S')$, das nach Induktionsvoraussetzung die Eigenschaft [3, 6] hat, also besitzt $U(S)$ selbst schon diese Eigenschaft.

Zu III. Durch Hinzufügen einer Zeile etwa $\mathfrak{a} = \{+++\cdots++\} \notin S$ entstehe aus dem m-spaltigen Schema S das neue Schema $T = S \cup \mathfrak{a}$, von dem wir zeigen wollen, daß es nicht die Eigenschaft [3, 7] besitzt. Für drei Spalten ist dies und für $m-1$ Spalten sei dies richtig $(m \geqq 4)$. Es sind zwei Fälle denkbar.

α) Die Zeile $\mathfrak{z} = \{+++\cdots+-\}$ liege nicht in S. Beim Streichen der letzten Spalte erhält man $\mathfrak{a}' = \mathfrak{z}' = \{+++\cdots+\} \in T'$, aber $\mathfrak{a}' \notin S$. Die $(m-1)$-spaltige Matrix S' ist realisierbar, daher hat T' nach Induktionsvoraussetzung nicht die Eigenschaft [3, 7]. Man kann also $m-4$ Spalten aus T' derart auswählen, daß bei ihrem Streichen acht verschiedene Zeilen übrigbleiben. T' ist aber bereits durch Streichung einer Spalte aus T entstanden, somit ist auch für T die Eigenschaft [3, 7] nicht zutreffend, w. z. b. w. Dieser Schluß geht analog auch dann, wenn in der Zeile $\mathfrak{z}$ das einzige Minuszeichen an einer beliebigen anderen Stelle steht.

β) Es sei daher jetzt angenommen, daß die m Zeilen

$$\begin{array}{l} -++\cdots++ \\ +-+\cdots++ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ +++\cdots+- \end{array}$$

in S liegen. Wenn man auf alle $\binom{m}{2}$ möglichen Paare dieser m Zeilen den Satz 4 anwendet, erhält man wegen $\mathfrak{a} \notin S$ für das Schema S die Existenz aller $\binom{m}{2}$ Zeilen, die genau zwei Minuszeichen besitzen. Nun kann keine Zeile

mit mindestens drei Minuszeichen in S liegen, weil sonst die für S bereits nachgewiesene Eigenschaft [3, 7] verletzt wäre. S besteht also aus allen Zeilen der Länge m, die mindestens ein und höchstens zwei Minuszeichen enthalten. Für $m > 4$ folgte, daß $U(S)$ leer ist im Widerspruch zu Satz 2. Für $m = 4$ folgte, daß $U(S)$ nur aus sechs Zeilen besteht, die untereinander überhaupt nicht benachbart sind, was ebenfalls dem Satz 2 widerspricht.

Die drei Bedingungen I, II, III von Satz 1 sind hiermit als notwendig erkannt (auch für $m = 4$).

Das Standardschema. Es sei Σ_m die Menge *aller* Zeilen $z = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ mit der Eigenschaft, daß aus $z_i = z_{i+k} = -1$ stets folgt, daß sogar $z_i = z_{i+1} = \cdots = z_{i+k} = -1$ ist. Dieses Schema Σ_m heiße das Standardschema. Streicht man in Σ_m alle bis auf drei Spalten, so verbleibt nicht die Zeile $\{-+-\}$, aber alle sieben anderen Möglichkeiten; daher besitzt Σ_m die Eigenschaft [3, 7]. Auch die beiden Bedingungen II, III könnten wir für Σ_m leicht direkt nachweisen. Statt dessen wollen wir sogleich die geradlinige Realisierbarkeit von Σ_m zeigen.

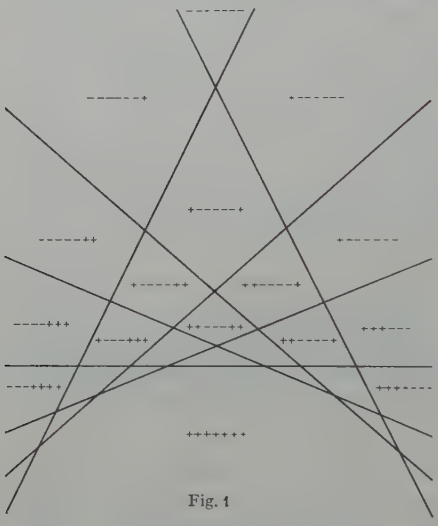

Fig. 1

An einen Kreisbogen, der kleiner als ein zugehöriger Halbkreis ist, seien m verschiedene Tangenten gezogen (Fig. 1). Durch die Orientierung des Kreisbogens im Sinne des Uhrzeigers werden die m Tangenten in natürlicher Weise numeriert und orientiert. Wir zeigen, daß das Schema S der aus den m Tangenten gebildeten einfachen Konfiguration identisch mit Σ_m ist. Für $m = 3$ ist das richtig. S kann keine Zeile von der Form $\{\cdots - \cdots + \cdots - \cdots\}$ haben, da man sonst durch Streichen der durch Punkte angedeuteten Spalten einen Widerspruch zum Fall $m = 3$ erhält. Also gilt $S \subset \Sigma_m$. S ist als realisierbares Schema maximal bezüglich der Eigenschaft [3, 7]. Weil aber Σ_m diese Eigenschaft [3, 7] auch besitzt, folgt sogar $S = \Sigma_m$. Das Standardschema Σ_m ist also geradlinig realisierbar.

§ 2. Über kombinatorisch definierte Schemata

Auch im folgenden werden die Bedingungen von Satz 1 der Einleitung immer wieder zitiert.

Satz 5. *Wenn ein Schema S den beiden Bedingungen I und II genügt, so gelten diese auch für das Schema S'.*

Beweis. Mit S hat natürlich auch S' die Eigenschaft [3, 7], d.h. Bedingung I ist erfüllt. Wir wollen für $U(S')$ auch die Eigenschaft [3, 6] zeigen

Aus $\mathfrak{a} \in U(S)$ folgt $\mathfrak{a}, -\mathfrak{a} \in S$, also auch $\mathfrak{a}', -\mathfrak{a}' \in S'$, daher $\mathfrak{a}' \in U(S')$. Es gilt somit $U(S)' \subset U(S')$. Mit $U(S)$ hat auch $U(S)'$ die Eigenschaft [3, 6]. Wenn wir also in $U(S')$ alle bis auf drei Spalten streichen, so erhalten wir mindestens sechs verschiedene Zeilen. Mehr als sechs können es aber nie sein; da in $U(S')$ alle Zeilen zu Paaren auftreten, würden sonst sogar alle acht Zeilen nach dem Streichen vorkommen. Das widerspräche der Eigenschaft [3, 7] von $S' \supset U(S')$. Für S' gilt also Bedingung II.

Satz 6. *Wenn ein Schema S den Bedingungen I und II genügt, so ist $U(S)$ minimal bezüglich der Eigenschaft* [3, 6], *d.h. wenn man aus $U(S)$ eine beliebige Zeile entfernt, so geht die Eigenschaft* [3, 6] *verloren.*

Beweis. Es sei m die Spaltenanzahl von S. Für $m \leqq 2$ ist Satz 6 inhaltslos, also richtig. Nach Bedingung I besteht S für $m = 3$ aus genau sieben Zeilen, von denen eine beschränkt ist, daher ist für $m = 3$ Satz 6 auch richtig. Wir nehmen an, Satz 6 gelte für jedes $(m-1)$-spaltige Schema. Es sei S ein m-spaltiges Schema und $\mathfrak{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \in U(S)$. Der Beweis von Satz 5 ergab $\mathfrak{a}' \in U(S)' \subset U(S')$. Da S' den Bedingungen I und II genügt, gibt es nach Induktionsvoraussetzung zu der Zeile $\mathfrak{a}'$ ein Spaltentripel — etwa die ersten drei —, so daß $\mathfrak{a}'$ die einzige Zeile aus $U(S')$ ist, die in diesen drei Spalten mit $\mathfrak{a}'$ übereinstimmt. Dies gilt erst recht in der Untermenge $U(S)'$, d.h. aus

$$\mathfrak{z}' = \{a_1, a_2, a_3, x_4, \ldots, x_{m-1}\} \in U(S)' \quad \text{folgt} \quad \mathfrak{z}' = \mathfrak{a}'.$$

Wir behaupten, daß diese Aussage noch verschärft werden kann, indem eines der drei a_i auch noch durch eine Unbestimmte ersetzt wird, etwa a_3 durch x_3. Wäre das nicht möglich, so müßten drei Zeilen von der Form

$$\mathfrak{z}'_{\mathfrak{d}3} = \{a_1, a_2, -a_3, \ldots\}$$
$$\mathfrak{z}'_{\mathfrak{d}2} = \{a_1, -a_2, a_3, \ldots\}$$
$$\mathfrak{z}'_{\mathfrak{d}1} = \{-a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

in $U(S)'$ existieren. Dann wären aber die acht Zeilen $\pm\mathfrak{a}'$, $\pm\mathfrak{z}'_{\mathfrak{d}1}$, $\pm\mathfrak{z}'_{\mathfrak{d}2}$, $\pm\mathfrak{z}'_{\mathfrak{d}3}$ in S' vorhanden. Beim Streichen der letzten $m-4$ Spalten würde der Widerspruch zu Eigenschaft [3, 7] ersichtlich. Also gilt, aus

$$\mathfrak{z}' = \{a_1, a_2, x_3, x_4, \ldots, x_{m-1}\} \in U(S)' \quad \text{folgt} \quad \mathfrak{z}' = \mathfrak{a}'.$$

Das bedeutet, aus

$$\mathfrak{z} = \{a_1, a_2, x_3, x_4, \ldots, x_{m-1}, a_m\} \in U(S) \quad \text{folgt} \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{a}.$$

Daher geht beim Entfernen der Zeile $\mathfrak{a}$ aus $U(S)$ die Eigenschaft [3, 6] tatsächlich verloren.

Satz 7. *Wenn S den Bedingungen I und II genügt, so gilt $U(S)' = U(S')$.*

Beim Beweis von Satz 5 erhielten wir die Relation $U(S)' \subset U(S')$. Die Zeilenmenge $U(S)'$ hat mit $U(S)$ auch die Eigenschaft [3, 6]. Da aber $U(S')$ nach Satz 6 keine echte Teilmenge enthalten kann, die auch noch Eigenschaft [3, 6] besitzt, folgt $U(S)' = U(S')$.

Satz 8. *Ein m-spaltiges Schema D mit der Eigenschaft [2, 3], das die beiden Zeilen $\mathfrak{a} = \{+ + + \cdots + +\}$ und $-\mathfrak{a}$ enthält, läßt sich nur durch geeignete Spaltenvertauschungen auf die Dreiecksform*

$$\Delta_m = \begin{pmatrix} + + + \cdots + + \\ - + + \cdots + + \\ - - + \cdots + + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ - - - \cdots - + \\ - - - \cdots - - \end{pmatrix}$$

bringen.

Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion nach der Spaltenanzahl. Für $(m-1)$-spaltige Schemata sei Satz 8 richtig. Wir wollen ihn auch für das m-spaltige Schema D beweisen. Durch eventuelle Spaltenvertauschung können wir zunächst erreichen, daß die letzte Spalte von D eine Spalte mit den meisten Pluszeichen ist. Das $(m-1)$-spaltige Schema D' erfüllt die Voraussetzungen von Satz 8 und läßt sich daher nach Induktionsvoraussetzung durch Spaltenvertauschungen auf die Form Δ_{m-1} bringen. Wir können uns die dabei möglichen Vertauschungen bereits vorher in D so ausgeführt denken, daß $D' = \Delta_{m-1}$ ist. Es gibt also Einheiten $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$, so daß

$$(1) \quad \{\underbrace{- - - \cdots - -}_{i\text{-mal}} + + \cdots +, x_i\} = \{\mathfrak{e}_i, x_i\} \in D \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1)$$

ist. Wir behaupten, daß dann

$$(2) \qquad +1 \geq x_0 \geq x_1 \geq \cdots \geq x_{m-1} \geq -1$$

gilt. Wäre nämlich etwa $x_j < x_{j+1}$, d.h. $x_j = -1$, $x_{j+1} = +1$, so enthielte D die vier Zeilen

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \{+ \cdots + + + \cdots + +\}, \\ \{\mathfrak{e}_j, -1\} &= \{- \cdots - + + \cdots + -\}, \\ \{\mathfrak{e}_{j+1}, +1\} &= \{- \cdots - - + \cdots + +\}, \\ -\mathfrak{a} &= \{- \cdots - - - \cdots - -\}. \end{aligned}$$

Streichen wir hierin alle Spalten bis auf die $(j+1)$-te und die letzte, so sehen wir, daß die Eigenschaft [2, 3] für D verletzt wäre. Also ist (2) richtig. Nach (1) enthält die vorletzte also auch die letzte Spalte von D mindestens $m-1$ positive Einheiten. Die m Zeilen (1) können aber noch nicht das ganze Schema D ausmachen, da sonst $1 = x_0 = x_1 = \cdots = x_{m-2}$, $x_{m-1} = -1$ folgte und bei D nach Streichung der ersten $m-2$ Spalten nur zwei verschiedene Zeilen verblieben. Daher muß für mindestens einen Index t auch $\{\mathfrak{e}_t, -x_t\} \in D$ gelten. Da aber aus (1) stets (2) folgt, kann nur ein einziger Index t mit $\{\mathfrak{e}_t, -x_t\} \in D$ existieren. Es sei x_t von vornherein so gewählt, daß $x_t > -x_t$ ist. Die Annahme $t \leq m-2$ würde bedeuten, daß in der vorletzten Spalte von D nur

ein einziges, aber in der letzten Spalte zwei Minuszeichen stehen. Also muß $t = m - 1$ sein, d.h. D hat bereits die Dreiecksform Δ_m.

Die in der Einleitung[5]) definierte Äquivalenz zweier Schemata A, B wird durch $A \sim B$ bezeichnet, während $A = B$ Übereinstimmung bis auf Zeilenvertauschung bedeuten soll. Wir gehen jetzt auf den Fall $m = 4$ näher ein. Es sei S ein vierspaltiges Schema, das den Bedingungen I und II genügt. Weil S' nach Satz 5 auch die Bedingungen I, II erfüllt und ein dreispaltiges Schema durch I und II bereits bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist, folgt $S' \sim \Sigma_3$. Wir können also S von vornherein so normiert denken, daß

$$U(S') = U(\Sigma_3) = \begin{pmatrix} + & + & + \\ - & + & + \\ - & - & + \\ - & - & - \\ + & - & - \\ + & + & - \end{pmatrix} = U(S)'$$

ist (Satz 7). Wenn wir die vierte Spalte noch passend normieren, müssen also zwei Zeichen x, y existieren, so daß die drei Zeilen

$$(3) \qquad \begin{cases} + + + + \\ - + + x \\ - - + y \end{cases}$$

in $U(S)$ liegen. Bei spezieller Wahl von x, y stoßen wir auf zwei wesentlich verschiedene Fälle.

α) Es sei $x = -1$, $y = +1$. $U(S)$ besteht dann aus den drei Zeilen (3) und den drei dazu reziproken, denn für diese sechs Zeilen ist bereits die Eigenschaft [3, 6] erfüllt (Satz 6). Es gibt sogar ein dazu passendes Schema S, nämlich

$$4) \qquad \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ - & + & + & - \\ - & - & + & + \\ - & - & - & - \\ + & - & - & + \\ + & + & - & - \\ - & - & - & + \\ - & + & - & - \\ - & + & - & + \\ - & + & + & + \\ + & + & - & + \end{pmatrix},$$

das allen drei Bedingungen I, II, III gerecht wird. Trotzdem ist das Schema (4) nicht realisierbar, weil es nur sechs unbeschränkte Zeilen enthält, die paarweise nicht benachbart sind.

[5]) Die dort nur für einfache Konfigurationen erklärte Äquivalenz ist sinngemäß auch für Schemata zu verstehen.

β) Im Falle $x = y = +1$ muß wegen der Bedingung II außer den drei Zeilen (3) und ihrer reziproken noch eine siebente also auch eine achte Zeile in $U(S)$ vorhanden sein. Indem wir die drei ersten Spalten eventuell umnormieren und vertauschen, können wir annehmen, daß die Zeile $\{+++-\}$ noch zu $U(S)$ gehört. Es folgt

$$U(S) = U(\Sigma_4) = \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ - & + & + & + \\ - & - & + & + \\ - & - & - & + \\ - & - & - & - \\ + & - & - & - \\ + & + & - & - \\ + & + & + & - \end{pmatrix}.$$

Auch die anderen beiden Möglichkeiten $x = y = -1$ und $x = -y = +1$ führen bei passender Normierung auf den vorstehenden Fall. Wir wollen das Schema $U(\Sigma_4)$ durch Hinzufügen weiterer Zeilen zu einem Schema S ergänzen, das den Bedingungen I und II genügen soll. Es zeigt sich, daß dies im wesentlichen nur auf eine Art, nämlich $S \sim \Sigma_4$, möglich ist. Von den 16 denkbaren Zeilen kommen in $U(\Sigma_4)$ die 8 Zeilen

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= \{--+-\}, & -\mathfrak{a}_1, \\ \mathfrak{a}_2 &= \{-++-\}, & -\mathfrak{a}_2, \\ \mathfrak{a}_3 &= \{-+--\}, & -\mathfrak{a}_3, \\ \mathfrak{a}_4 &= \{-+-+\}, & -\mathfrak{a}_4 \end{aligned}$$

nicht vor. Es läßt sich leicht zeigen, daß jedesmal ein Schema mit I und II entsteht, wenn zu $U(S)$ noch die drei Zeilen

$$\begin{array}{llllllll} \mathfrak{a}_1, & \mathfrak{a}_2, & \mathfrak{a}_3 & \text{oder} & -\mathfrak{a}_1, & -\mathfrak{a}_2, & -\mathfrak{a}_3 & \text{oder} \\ \mathfrak{a}_2, & \mathfrak{a}_3, & \mathfrak{a}_4 & \text{oder} & -\mathfrak{a}_2, & -\mathfrak{a}_3, & -\mathfrak{a}_4 & \text{oder} \\ \mathfrak{a}_3, & \mathfrak{a}_4, & -\mathfrak{a}_1 & \text{oder} & -\mathfrak{a}_3, & -\mathfrak{a}_4, & \mathfrak{a}_1 & \text{oder} \\ \mathfrak{a}_4, & -\mathfrak{a}_1, & -\mathfrak{a}_2 & \text{oder} & -\mathfrak{a}_4, & \mathfrak{a}_1, & \mathfrak{a}_2 & \end{array}$$

hinzugefügt werden. In allen diesen acht Fällen entsteht aus $U(\Sigma_4)$ ein Schema, das zu Σ_4 äquivalent ist. Dies kann man kombinatorisch ausprobieren. Bequemer erkennen wir es, wenn wir mit Hilfe von Zeichnungen alle realisierbaren Schemata aufsuchen. Es läßt sich auch leicht zeigen, daß keine weitere Möglichkeit, das Schema $U(\Sigma_4)$ zu einem Schema S zu ergänzen, existiert. Die zwei Zeilen $\mathfrak{a}_2$ und $-\mathfrak{a}_3$ dürfen z. B. nicht gleichzeitig in S liegen, weil dies gegen Eigenschaft [3, 7] verstößt, was wir beim Streichen der dritten Spalte sehen.

Hiermit ist gezeigt: *Wenn ein vierspaltiges Schema den Bedingungen I und II genügt, so hat es entweder nur sechs unbeschränkte Zeilen oder es ist äquivalent zu* Σ_4. Für später brauchen wir noch

Satz 9. *Wenn ein fünfspaltiges Schema S den Bedingungen I, II, III genügt, so ist S' äquivalent zu Σ_4.*

Beweis. Nach Satz 5 erfüllt S' die Bedingungen I und II. Wir haben daher nur zu zeigen, daß $U(S')$ mehr als sechs Zeilen enthält. Wir nehmen das Gegenteil an, d.h. für S' soll der Fall α) zutreffen. S sei so normiert, daß die drei Zeilen (3) mit $x=-y=1$ in $U(S')$ enthalten sind. Es gibt also drei Einheiten x_1, x_2, x_3, so daß

$$(5) \qquad \begin{pmatrix} +++++x_1 \\ -++-x_2 \\ --++x_3 \end{pmatrix} < U(S).$$

1. Wenn wir annehmen, daß $U(S)$ auch nur aus sechs Zeilen besteht, so wären die x_i durch (5) eindeutig bestimmt. Aus $x_1=+1$ folgte $x_2=-1$, sonst blieben in $U(S)$ beim Streichen der ersten und vierten Spalte nur vier verschiedene Zeilen stehen. Ebenso folgt $x_3=-1$, wenn wir die ersten beiden Spalten streichen. Bei $-x_1-x_2=x_3$ bleiben aber nach Streichung der zweiten und vierten Spalte wieder nur vier Zeilen stehen entgegen der Eigenschaft [3, 6].

2. Wenn wir jedoch annehmen, daß in (5) mindestens eines der drei $x_i=+1$ *und* -1 gesetzt werden darf, so können wir jedesmal zwei passende Spalten streichen, wonach entgegen der Eigenschaft [3, 6] sogar *acht* verschiedene Zeilen stehenbleiben. Wir zählen diese Fälle genau auf:

Bei $x_1=+1$, $x_2=+1$, $x_3=\pm 1$ streiche man die 2-te und 3-te Spalte.
Bei $x_1=+1$, $x_2=-1$, $x_3=\pm 1$ streiche man die 1-te und 4-te Spalte.
Bei $x_1=+1$, $x_2=\pm 1$, $x_3=+1$ streiche man die 3-te und 4-te Spalte.
Bei $x_1=+1$, $x_2=\pm 1$, $x_3=-1$ streiche man die 1-te und 2-te Spalte.
Bei $x_1=\pm 1$, $x_2=+1$, $x_3=+1$ streiche man die 1-te und 3-te Spalte.
Bei $x_1=\pm 1$, $x_2=+1$, $x_3=-1$ streiche man die 2-te und 4-te Spalte.

Die Annahme, daß $U(S')$ nur aus sechs Zeilen besteht, führt also in jedem Falle zum Widerspruch, womit Satz 9 bewiesen ist.

Satz 10. *Für ein den Bedingungen I und II genügendes Schema S mit der Spaltenanzahl $m\neq 4$ ist $U(S)$ äquivalent zu $U(\Sigma_m)$.*

Beweis. Für $m\leqq 3$ ist Satz 10 richtig. Da S' nach Satz 5 den Bedingungen I und II genügt, können wir als Induktionsvoraussetzung annehmen, daß $U(S')\sim U(\Sigma_{m-1})$ ist. Für $m=5$ ist dies nach Satz 9 tatsächlich erfüllt, so daß der folgende Induktionsschluß den Induktionsanfang $m=5$ mitliefert. Wir können annehmen, daß das Schema S bereits so normiert ist, daß sogar $U(S')=U(\Sigma_{m-1})$ ist und somit aus den $2m-2$ Zeilen $\pm e_0, \pm e_1, \ldots, \pm e_{m-2}$ besteht, wobei

$$e_i=\{\underbrace{--\cdots-}_{i\text{-mal}}+\cdots+\}$$

gesetzt ist. Wegen $U(S') = U(S)'$ gibt es Einheiten $x_0, x_1, \ldots, x_{m-2}$, so daß

$$\{e_i, x_i\} \in U(S) \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-2). \tag{6}$$

Wir behaupten, daß ein Index $t \leqq 3$ existiert mit $x_t = x_{t+1}$. Träfe das Gegenteil zu, so folgte

$$\{e_0, x_0\}, \{e_1, -x_0\}, \{e_2, x_0\}, \{e_3, -x_0\} \in U(S),$$

also auch

$$\{-e_0, -x_0\}, \{-e_1, x_0\}, \{-e_2, -x_0\}, \{-e_3, x_0\} \in U(S).$$

Wenn man alle Spalten bis auf die zweite, vorletzte und letzte streicht, so bleiben diese acht Zeilen verschieden im Widerspruch zu Eigenschaft [3, 6]. Es gibt also ein t mit

$$\{e_t, x_t\}, \{e_{t+1}, x_t\} \in U(S),$$

d.h. *in $U(S)$ existieren zwei zueinander benachbarte Zeilen.*

Das Schema S werde jetzt neu normiert, so daß $\{+ + \cdots + + +\}$ und $\{+ + \cdots + + -\}$ als die beiden benachbarten Zeilen in $U(S)$ liegen. Es sei P die Menge aller Zeilen von $U(S)$, deren letzte Komponente $= +1$ ist. Wenn wir in P alle Spalten bis auf die letzte und zwei beliebige andere streichen, so bleiben genau drei verschiedene Zeilen übrig, weil $U(S)$ die Eigenschaft [3, 6] hat. Also hat P' die Eigenschaft [2, 3] und enthält die Zeilen $\mathfrak{a} = \{+ + + \cdots +\}$ und $-\mathfrak{a}$. Nach Satz 8 läßt sich P' durch passende Spaltenvertauschung auf die Dreiecksform Δ_{m-1} bringen. Aus

$$P \sim \begin{pmatrix} + + \cdots + + + \\ - + \cdots + + + \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdots \\ - - \cdots - + + \\ - - \cdots - - + \end{pmatrix}$$

folgt dann sofort, daß $U(S) \sim U(\Sigma_m)$ ist.

Bemerkung. Aus obigem Beweis geht noch hervor, daß man bei der Überführung von $U(S)$ in $U(\Sigma_m)$ die letzte Spalte unberührt an ihrer Stelle lassen kann.

Satz 11. *Wenn ein Schema S den drei Bedingungen I, II, III genügt, so gelten diese auch für S'.*

Ist S vierspaltig, so ist $S' \sim \Sigma_3$. Wir dürfen also für S mehr als vier Spalten voraussetzen. Wegen Satz 5 ist für S' nur noch die Bedingung III zu zeigen. Nach Satz 10 und obiger Bemerkung dürfen wir annehmen, daß S bereits so normiert ist, daß $U(S) = U(\Sigma_m)$ ist. Dann läßt sich die Eigenschaft [3, 7] in folgender schärferer Form aussprechen. Wenn wir $m-3$ beliebige Spalten von S streichen, so fehlt sicher entweder nur die Zeile $\{+-+\}$ oder nur die Zeile $\{-+-\}$, weil die anderen sechs Möglichkeiten durch Zeilen von $U(\Sigma_m) < S$ realisiert sind. Durch S ist also für jedes Indextripel i, j, k ein a_{ijk} so definiert, daß nur die Zeile $\{a_{ijk}, -a_{ijk}, a_{ijk}\}$ fehlt,

wenn wir alle Spalten mit Ausnahme der i-ten, j-ten und k-ten streichen $(i<j<k)$. Es gibt also in S keine Zeile $\mathfrak{z}=\{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ mit $z_i=-z_j=z_k=a_{ijk}$ für alle $\binom{m}{3}$ möglichen Indextripel. Alle anderen Zeilen, die nicht unter dieses Verbot fallen, sind in S wegen Bedingung III vorhanden.

Zwischen den a_{ijk} gelten die nachfolgenden Beziehungen. Es sei $1\leqq i<j<k<l\leqq m$.

(7) Aus $a_{ijk}=-a_{ijl}$ folgt $a_{ijl}=a_{jkl}$.

(8) Aus $a_{ijk}=-a_{ijl}$ folgt $a_{ijl}=a_{ikl}$.

(9) Aus $a_{jkl}=-a_{ikl}$ folgt $a_{ikl}=a_{ijk}$.

(10) Aus $a_{jkl}=-a_{ikl}$ folgt $a_{ikl}=a_{ijl}$.

Beweis zu (7) und (8). Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit $a_{ijk}=+1$ setzen, da wir nötigenfalls das ganze S mit -1 multiplizieren dürfen ohne die Gleichung $U(S)=U(\Sigma_m)$ zu zerstören. Durch Streichen aller Spalten bis auf die i-te, j-te, k-te, l-te erhalten wir aus S ein vierspaltiges Schema S^*, das die Eigenschaft [3, 7] besitzt. Es sei also $a_{ijk}=-a_{ijl}=1$. Wegen $a_{ijk}=1$ sind die beiden Zeilen

(11) $$\{+-+\pm\}\notin S^*,$$

jedoch gibt es wegen der Eigenschaft [3, 7] ein Zeichen x, so daß

$$\{-+-x\}\in S^*$$

ist. Aus $a_{ijl}=-1$ folgt ebenso, daß die beiden Zeilen

(12) $$\{-+\pm-\}\notin S^*$$

sind, aber für passendes y die Zeile

$$\{+-y+\}\in S^*$$

ist. Aus (11) folgt $y=-1$ und aus (12) $x=+1$. Wegen $\{-+-+\}\in S^*$ ist $a_{jkl}=-1$, also gilt (7). Da $\{+---+\}\in S^*$ ist, gilt $a_{ikl}=-1$; daher ist auch (8) bewiesen.

Der Beweis zu (9) und (10) ergibt sich, wenn man im Schema S die h-te mit der $(m+1-h)$-ten Spalte $\left(h=1, 2, \ldots, \left[\frac{m}{2}\right]\right)$ vertauscht, also um die senkrechte Achse spiegelt, und dann (7) und (8) anwendet.

Um nun für S' die Bedingung III nachzuweisen, nehmen wir eine Zeile $\mathfrak{a}'=\{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}\}$, die nicht in S' liegt. Wir haben zu zeigen, daß das Schema $S'\cup\mathfrak{a}'$ nicht die Eigenschaft [3, 7] hat. Wir nehmen das Gegenteil an. Es sei also kein Indextripel i, j, k mit $1\leqq i<j<k<m$ vorhanden, so daß $a_{ijk}=a_i=-a_j=a_k$ ist, d.h.

(13) aus $a_i=-a_j=a_k$ folgt $-a_i=a_{ijk}$, wenn $1\leqq i<j<k<m$ ist.

Es sei $a_m=+1$ oder -1. Da $\mathfrak{a}'\notin S'$, ist auch $\mathfrak{a}_1=\{\mathfrak{a}', a_m\}\notin S$ und $\mathfrak{a}_2=\{\mathfrak{a}', -a_m\}\notin S$. Wegen der Bedingung III für S ist im Schema $S\cup\mathfrak{a}_1$ die

Eigenschaft [3, 7] verletzt. Es gibt also drei Spaltenindizes e, f, t, so daß beim Streichen der übrigen Spalten vom Schema $S \cup \mathfrak{a}_1$ noch acht verschiedene Zeilen übrigbleiben. Für die Zeile $\mathfrak{a}_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m\}$ bedeutet das, daß

$$a_e = -a_f = a_t = a_{eft} \qquad (e < f < t \leqq m)$$

ist. Nach (13) muß hier $t = m$ sein. Auch bezüglich der Zeile

$$\mathfrak{a}_2 = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, -a_m\} \notin S$$

existieren ebenso drei Indizes g, h, m, so daß

$$a_g = -a_h = -a_m = a_{ghm} \qquad (g < h < m)$$

ist. Es gilt also

$$a_{efm} = -a_{ghm} = a_e = -a_f = -a_g = a_h, \tag{14}$$

woraus $e \neq g$ und $f \neq h$ folgt. Der Wert von a_m, über den wir noch verfügen dürfen, läßt sich jetzt so wählen, daß $e < g$ wird. Bei Änderung von a_m vertauscht sich nämlich $\mathfrak{a}_1$ mit $\mathfrak{a}_2$ und somit e mit g. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall. $f < h$. Es ist also $e < f < h < m$ und $e < g < h < m$. Aus (14) folgt $a_e = -a_g = a_h$ und $a_e = -a_f = a_h$, somit nach (13) die Gleichung $-a_e = a_{egh} = a_{efh}$. Wegen (14) ist daher $a_{efh} = -a_{efm}$. Nach (8) folgt daraus $a_{efm} = a_{ehm}$. Aus (14) folgt $a_{ghm} = -a_{ehm}$. Die Anwendung von (9) ergibt $a_{ehm} = a_{egh}$ und somit $-a_e = a_{egh} = a_{ehm} = -a_{ghm} = a_e$, was nicht sein kann.

2. Fall. $e < g < h < f < m$. Nach (14) ist $a_e = -a_g = a_h$ und $a_g = -a_h = a_f$, woraus nach (13) folgt $a_{egh} = -a_e = a_g = -a_{ghf}$. Wegen (14) ist

$$a_{ghf} = -a_{ghm}, \tag{15}$$

also nach (8) auch $a_{ghm} = a_{gfm}$. Auf Grund von (14) können wir dafür schreiben $a_{gfm} = -a_{efm}$. Nach (9) und (10) folgt $a_{efm} = a_{egf} = a_{egm}$, somit auch $a_{egh} = -a_{egf}$ und $a_{egh} = -a_{egm}$. Nach (7) ergibt sich $a_{egf} = a_{ghf}$ und $a_{egm} = a_{ghm}$, daher $a_{ghf} = a_{egh} = a_{ghm}$ im Gegensatz zu (15).

Die Annahme, daß S nicht der Bedingung III genügt, führt also zum Widerspruch.

§ 3. Zurückführung auf das Standardschema

In allen Sätzen dieses Paragraphen wird vorausgesetzt, daß das betrachtete m-spaltige Schema S den Bedingungen I, II, III genügt und daß $S \sim \Sigma_4$ ist, falls $m = 4$ ist. Wegen Satz 9 und 11 gelten diese Voraussetzungen dann auch für S', so daß die Induktionsschlüsse nicht, wie bisher, bei $m = 4$ steckenbleiben.

Satz 12. *Wenn sich zwei Zeilen* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *des* m*-spaltigen Schemas* S *nur in zwei Komponenten unterscheiden, so existiert in* S *auch eine Zwischenzeile* $\mathfrak{c}$, *die zu* $\mathfrak{a}$ *und zu* $\mathfrak{b}$ *benachbart ist.*

Beweis. Für $m \leqq 4$ ist $S \sim \Sigma_m$ realisierbar, somit ist wegen Satz 4 auch Satz 12 richtig. Er sei bereits für alle $(m-1)$-spaltigen Schemata bewiesen

und soll auch für m gezeigt werden ($m \geqq 5$). Es sei $\mathfrak{a} = \{+++\cdots+\}$, $\mathfrak{b} = \{--++\cdots+\} \in S$. Wir nehmen das Gegenteil von Satz 12 an, nämlich daß beide Zeilen $\mathfrak{c}_1 = \{-+++\cdots+\}$ und $\mathfrak{c}_2 = \{+--++\cdots+\}$ nicht in S liegen. Wenn wir die letzte Spalte streichen, folgt unter Benützung der Induktionsvoraussetzung der Reihe nach:

$$\mathfrak{a}', \mathfrak{b}' \in S'; \quad \mathfrak{c}_1' \quad \text{oder} \quad \mathfrak{c}_2' \in S'; \quad \{\mathfrak{c}_1', -1\} \quad \text{oder} \quad \{\mathfrak{c}_2', -1\} \in S.$$

Diese Überlegung gilt natürlich nicht nur bezüglich der letzten Spalte, sondern auch in bezug auf die vor- und drittletzte. Diese sind nämlich bei $m \geqq 5$ verschieden von den ersten beiden. Es folgt also

$$(16) \quad \begin{cases} \mathfrak{p} = \{-+\cdots-+-\} & \text{oder} \quad \{+-\cdots++-\} \in S, \\ \mathfrak{q} = \{-+\cdots+--\} & \text{oder} \quad \{+-\cdots++-+\} \in S, \\ \quad\ \{-+\cdots+-+\} & \text{oder} \quad \{+-\cdots+-++\} \in S. \end{cases}$$

Mindestens zwei Zeilen von (16), die in den ersten $m-3$ Komponenten übereinstimmen, liegen in S, etwa $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$. In S existieren also die vier Zeilen

$$(17) \quad \begin{cases} -+--\cdots--- \\ ---\cdots+-\ -+ \\ -++\cdots+++ \\ -\ -\cdots-+- \end{cases}.$$

Nach Bedingung III muß aber dann auch die Zeile

$$\mathfrak{c}_1 = \{-+\cdots+++\}$$

in S vorhanden sein, denn jedes Komponententripel von $\mathfrak{c}_1$ ist bereits in einer der vier Zeilen (17) realisiert. Das widerspricht der Voraussetzung $\mathfrak{c}_1 \notin S$.

Eine Zeile $\mathfrak{a}$ heiße zur i-ten Spalte *benachbart*, wenn eine Zeile $\mathfrak{z}$ im Schema S existiert, die sich nur in der i-ten Komponente von $\mathfrak{a}$ unterscheidet.

Satz 13. *Wenn eine Zeile $\mathfrak{a}$ aus S zu genau r Spalten, aber nicht zur letzten, benachbart ist, so hat $\mathfrak{a}'$ in S' auch genau r benachbarte Spalten.*

Beweis. Wir können annehmen, daß $\mathfrak{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ zu den ersten r Spalten benachbart ist ($r < m$). Wenn $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_r$ die r zu $\mathfrak{a}$ benachbarten Zeilen sind, so hat natürlich $\mathfrak{a}'$ die r verschiedenen Nachbarn $\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \ldots, \mathfrak{a}_r'$ in S'. Es ist nur zu zeigen, daß $\mathfrak{a}'$ keinen weiteren Nachbarn $\mathfrak{b}'$ in S' besitzen kann. Nehmen wir an, dies sei doch der Fall und $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ unterscheiden sich nur in der $(r+1)$-ten Komponente. Es folgt $r+1 < m$ und $\mathfrak{b} = \{\mathfrak{b}', -a_m\}$, da $\{\mathfrak{b}', a_m\} \notin S$ ist. Die Zeilen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ unterscheiden sich nur in der $(r+1)$-ten und letzten Komponente. Nach Satz 12 existiert dann doch noch eine zu $\mathfrak{a}$ benachbarte Zeile, die verschieden von den Zeilen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ ist.

Satz 14. *Jede beschränkte Zeile des Schemas S besitzt mindestens drei benachbarte Zeilen in S.*

Beweis. Für weniger als drei Spalten ist Satz 14 richtig. Wir nehmen ihn für alle $(m-1)$-spaltigen Schemata als bewiesen an. Es sei $\mathfrak{a} = \{++\cdots++\}$

eine beschränkte Zeile des m-spaltigen Schemas S. Wenn $\mathfrak{a}$ zu allen Spalten benachbart ist, ist nichts mehr zu beweisen. $\mathfrak{a}$ sei also etwa zur letzten Spalte nicht benachbart. Falls $\mathfrak{a}' \in U(S')$ ist, so gilt $\mathfrak{a}' \in U(S') = U(S)'$ wegen Satz 7, und weil $\{\mathfrak{a}', -1\} \notin S$ ist, folgt $\mathfrak{a} \in U(S)$. Also muß die Zeile $\mathfrak{a}'$ in S' beschränkt sein. Nach Induktionsvoraussetzung hat $\mathfrak{a}'$ mindestens drei benachbarte Zeilen in S'. Wegen Satz 13 besitzt aber die Zeile $\mathfrak{a}$ ebenso viele Nachbarn in S, w. z. b. w.

Eine beschränkte Zeile von S, die genau drei benachbarte Zeilen besitzt, heiße eine *Dreieckszeile*. Nach Satz 13 und dem Beweis zu Satz 14 ergibt sich sofort

Satz 15. *Wenn $\mathfrak{d}$ im Schema S mit mehr als drei Spalten eine zu den ersten drei Spalten benachbarte Dreieckszeile ist, so ist $\mathfrak{d}'$ in S' auch eine Dreieckszeile.*

Satz 16. *Wenn $\mathfrak{d} = \{+++\cdots+\}$ eine Dreieckszeile von S ist mit den drei Nachbarzeilen*

$$\mathfrak{d}_1 = \{-++\cdots+\},$$
$$\mathfrak{d}_2 = \{+-+\cdots+\},$$
$$\mathfrak{d}_3 = \{++-\cdots+\},$$

so existieren in S auch die drei Zeilen

$$\mathfrak{d}_{23} = \{+--\cdots+\},$$
$$\mathfrak{d}_{13} = \{-+-\cdots+\},$$
$$\mathfrak{d}_{12} = \{--+\cdots+\}.$$

Beweis. Satz 16 gilt für weniger als fünf Spalten, da er für realisierbare Schemata richtig ist. Für $m-1$ Spalten sei er schon bewiesen ($m \geqq 5$). Wir nehmen an, daß Satz 16 für das m-spaltige Schema S nicht zutrifft, daß also etwa $\mathfrak{d}_{12} \notin S$, aber $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3 \in S$ sei. Dann ist $\mathfrak{d}'$ nach Satz 15 eine Dreieckszeile mit den Nachbarn $\mathfrak{d}_1', \mathfrak{d}_2', \mathfrak{d}_3'$ in S'. Nach Induktionsvoraussetzung existiert $\mathfrak{d}_{12}'$ in S'. Da $\mathfrak{d}_{12} \notin S$ ist, muß $\{\mathfrak{d}_{12}', -1\}$ in S liegen. Diesen Schluß führen wir nicht nur in bezug auf die letzte Spalte durch, sondern noch einmal bezüglich der vorletzten, die ja wegen $m \geqq 5$ auch von den drei ersten verschieden ist. Wir erhalten

$$(18) \qquad \begin{cases} \{-+-+\cdots++-\} \in S, \\ \{--++\cdots+-+\} \in S. \end{cases}$$

Weil S maximal bezüglich der Eigenschaft [3, 7] ist, zeigt sich jetzt, daß die Zeile

$$\mathfrak{d}_{12} = \{--++\cdots+++\}$$

doch in S liegen muß, weil jedes Komponententripel von $\mathfrak{d}_{12}$ bereits in einer der sechs Zeilen $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3$ und (18) vorkommt. In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß in S auch $\mathfrak{d}_{23}$ und $\mathfrak{d}_{13}$ liegen muß.

Das Schema S möge die Dreieckszeile $\mathfrak{d} = \{+++\cdots+\}$, die etwa zu den ersten drei Spalten benachbart sei, enthalten. Wegen Satz 16 und Eigenschaft [3, 7] ist dann die Zeile $\bar{\mathfrak{d}} = \{---+\cdots+\}$ *nicht* in S. Wenn wir

im Schema S die Zeile $\mathfrak{d}$ durch die Zeile $\overline{\mathfrak{d}}$ ersetzen, so entsteht ein neues Schema $\overline{S}$. Ein solcher Übergang von S zu $\overline{S}$ heiße eine *Dreieckstransformation*. Zu beachten ist, daß in S im allgemeinen mehrere Dreieckszeilen vorhanden und somit verschiedene Dreieckstransformationen möglich sind.

Satz 17. *Durch eine Dreieckstransformation entsteht aus S ein Schema $\overline{S}$, das wieder den drei Bedingungen I, II, III genügt.*

Die Bezeichnungen seien wie bei Satz 16 gewählt. Wir zeigen zunächst, daß die Dreieckszeile $\mathfrak{d} = \{+++\cdots+\}$ die einzige Zeile in S ist, die mit drei Pluszeichen beginnt. Gäbe es nämlich noch so eine Zeile $\mathfrak{p}$, so müßte diese — etwa als vierte Komponente — ein Minuszeichen enthalten, also $\mathfrak{p} = \{+++-\cdots\}$ sein. Beim Streichen der letzten $m-4$ Spalten bliebe $\mathfrak{d}$ nach Satz 15 eine Dreieckszeile; anderseits hätte sie aber einen vierten Nachbarn $\mathfrak{p}^* = \{+++-\}$ erhalten. Also ist $\mathfrak{d}$ doch die einzige mit drei Pluszeichen beginnende Zeile von S. Beim Entfernen der letzten $m-1$ Spalten bleibt daher bei $\overline{S}$ die Zeile $\{+++\}$ nicht übrig, dafür aber die Zeile $\{---\}$. Beim Streichen irgend dreier anderer Spalten ist im Ergebnis zwischen S und $\overline{S}$ kein Unterschied, weil die betreffenden Komponententripel von $\mathfrak{d}$ oder $\overline{\mathfrak{d}}$ bereits auch in mindestens einer der sechs Zeilen $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_{23}, \mathfrak{d}_{13}, \mathfrak{d}_{12}$ vorkommen. Hiermit ist für S die Eigenschaft [3, 7] gezeigt.

Um zunächst auch die Bedingung III nachzuweisen, sei

$$\mathfrak{a} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\} \notin \overline{S}.$$

Es soll gezeigt werden, daß das Schema $\overline{S} \cup \mathfrak{a}$ nicht die Eigenschaft [3, 7] hat. Wir unterscheiden drei Fälle.

α) Falls $\mathfrak{a} \in S$ ist, folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}$, und die Eigenschaft [3, 7] ist für $\overline{S} \cup \mathfrak{d} = S \cup \overline{\mathfrak{d}}$ tatsächlich verletzt, da ja für S die Bedingung III vorausgesetzt ist.

β) Wenn $\mathfrak{a} \notin S$ ist, so ist die Eigenschaft [3, 7] für das Schema $S \cup \mathfrak{a}$ gestört, und zwar bezüglich mindestens eines Spaltentripels. Wenn dies nicht gerade *nur* die drei ersten Spalten sind, so ist auch für $\overline{S} \cup \mathfrak{a}$ bezüglich dieses Spaltentripels die Eigenschaft [3, 7] verletzt.

γ) Es sei keine Zeile in S, die in den drei ersten Komponenten mit $\mathfrak{a} \notin S$ übereinstimmt, d.h. $\mathfrak{a} = \{-1, -1, -1, a_4, \ldots, a_m\}$, während alle anderen Komponententripel von $\mathfrak{a}$ durch mindestens eine Zeile von S realisiert sind. Da für das Schema $'S = '\overline{S}$, das durch Streichen der ersten Spalte aus S oder $\overline{S}$ hervorgeht, die Bedingung III gilt, folgt $'\mathfrak{a} \in 'S$ und somit

$$\{+1, -1, -1, a_4, \ldots, a_m\} \in S.$$

Analog folgt

$$\{-1, +1, -1, a_4, \ldots, a_m\} \in S,$$
$$\{-1, -1, +1, a_4, \ldots, a_m\} \in S.$$

Wegen $\mathfrak{a} \notin S$ liegen dann nach Satz 12 auch die drei Zeilen

$$\{+1, +1, -1, a_4, \ldots, a_m\},$$
$$\{+1, -1, +1, a_4, \ldots, a_m\},$$
$$\{-1, +1, +1, a_4, \ldots, a_m\}$$

in S. Wegen Bedingung III gehört somit auch die Zeile

$$\{+1, +1, +1, a_4, \ldots, a_m\}$$

zu S, da auch $\mathfrak{d} \in S$ ist. Weil aber $\mathfrak{d}$ die einzige Zeile aus S ist, die mit drei Pluszeichen beginnt, folgt $\overline{\mathfrak{d}} = \mathfrak{a}$ entgegen der Annahme $\mathfrak{a} \notin \overline{S}$.

Hiermit ist gezeigt, daß S die Bedingung III erfüllt. Wegen der Bedingung I kann die Zeile $-\overline{\mathfrak{d}} = \{+++--\cdots-\}$ nicht in S liegen, also ist $U(S) = U(\overline{S})$, d.h. die Bedingung II gilt auch.

Satz 18. *Der Übergang von $\overline{S}$ zurück zu S ist ebenfalls eine Dreieckstransformation.*

Es ist nur zu zeigen, daß $\overline{\mathfrak{d}}$ eine Dreieckszeile von $\overline{S}$ ist. Daß $\overline{\mathfrak{d}}$ beschränkt ist, wurde oben schon bemerkt. In S gibt es nach Satz 16 und Bedingung I keine mit drei Minuszeichen beginnende Zeile, also hat $\overline{\mathfrak{d}}$ in $\overline{S}$ nur die drei Nachbarzeilen $\mathfrak{d}_{23}, \mathfrak{d}_{13}, \mathfrak{d}_{12}$.

Satz 19. *Durch eine Dreieckstransformation geht ein realisierbares Schema S wieder in ein realisierbares Schema $\overline{S}$ über.*

Beweis. Das realisierbare Schema S genügt den drei Bedingungen I, II und III. Neben der Dreieckszeile $\mathfrak{d}$ existieren nach Satz 16 auch die sechs Zeilen $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_{23}, \mathfrak{d}_{13}, \mathfrak{d}_{12}$ in S. Es sei

Q_1 ein Punkt im Inneren der Trennlinie zwischen den Zellen $\mathfrak{d}_{12}$ und $\mathfrak{d}_1$,
Q_2 ein Punkt im Inneren der Trennlinie zwischen den Zellen $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_{13}$,
Q_3 ein Punkt im Inneren der Trennlinie zwischen den Zellen $\mathfrak{d}_{13}$ und $\mathfrak{d}_3$,
Q_4 ein Punkt im Inneren der Trennlinie zwischen den Zellen $\mathfrak{d}_3$ und $\mathfrak{d}_{23}$.

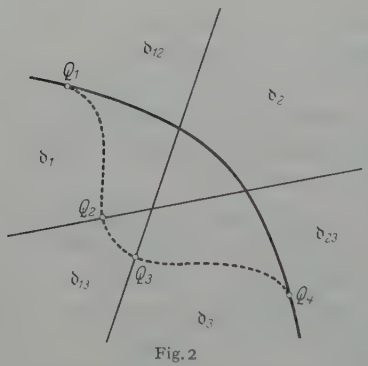

Fig. 2

Nun wird Q_i mit Q_{i+1} durch einen einfachen Bogen b_i verbunden, der bis auf seine Endpunkte mit $\mathfrak{K}$ keinen Schnittpunkt hat ($i = 1, 2, 3$). Den durch Q_1 und Q_2 bestimmten Teilbogen von g_2 ersetzen wir jetzt durch den Bogen $b_1 b_2 b_3$. Dabei geht g_2 in die neue Pseudogerade $\overline{g}_2$ und $\mathfrak{K}$ in eine einfache Konfiguration $\overline{\mathfrak{K}}$ über. Das Schema $\overline{S}$ von $\overline{\mathfrak{K}}$ muß die Zeile $\overline{\mathfrak{d}} = \{---+\cdots+\}$ enthalten, weil die Zelle $\mathfrak{d}_{13}$ durch $\overline{g}_2$ in zwei Zellen zerlegt wird. Da die sechs Zeilen $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_{23}, \mathfrak{d}_{13}, \mathfrak{d}_{12}$ in $\overline{S}$ wieder vorhanden sind, kann das realisierbare Schema $\overline{S}$ wegen Eigenschaft [3, 7] die Zeile $\mathfrak{d}$ nicht mehr enthalten. Der Übergang von S zu $\overline{S}$ ist daher tatsächlich die in Satz 17 betrachtete Dreieckstransformation.

In den folgenden Sätzen werden vom m-spaltigen Schema S wieder lediglich die drei Bedingungen I, II, III vorausgesetzt und daß im Falle $m = 4$ überdies $S \sim \Sigma_4$ ist.

Satz 20. *Wenn $\mathfrak{d}'$ eine Dreieckszeile von S' ist, so ist $\mathfrak{d} = \{\mathfrak{d}', +1\}$ oder $\mathfrak{d}_0 = \{\mathfrak{d}', -1\}$ eine Dreieckszeile von S.*

Beim Beweis wollen wir annehmen, daß $\mathfrak{d}' = \{++\cdots+\}$ etwa zu den ersten drei Spalten benachbart ist. Die Zeilen $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_0$ sind in S jedenfalls beschränkt, da sogar $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d}_0'$ in S' beschränkt ist. Falls etwa $\mathfrak{d}$ oder $\mathfrak{d}_0$ nicht in S liegt, so hat $\mathfrak{d}_0$ oder $\mathfrak{d}$ nur drei benachbarte Zeilen in S, ist also Dreieckszeile. Wir nehmen also an, daß beide Zeilen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_0$ in S liegen. Da $\mathfrak{d}'$ Dreieckszeile in S' ist, so ist sowohl $\mathfrak{d}$ als auch $\mathfrak{d}_0$ höchstens zur 1-ten, 2-ten, 3-ten und letzten Spalte benachbart. Hier kann man das Wort „höchstens" nicht durch „genau" ersetzen, sonst würde man beim Streichen der $m-4$ Spalten mit den Indizes 4 bis $m-1$ ein 4-spaltiges Schema erhalten, in dem zwei zueinander benachbarte Zeilen existieren, die beide zu allen vier Spalten benachbart sind. In Σ_4 kommt das jedoch nicht vor. Also ist $\mathfrak{d}$ oder $\mathfrak{d}_0$ nach Satz 14 zu drei Spalten benachbart, w. z. b. w.

Satz 21. *Ein m-spaltiges Schema S sei gegeben. Wenn sich durch eine Dreieckstransformation das Schema S' in das $(m-1)$-spaltige Schema V überführen läßt, so kann man durch höchstens zwei aufeinanderfolgende Dreieckstransformationen aus Schema S ein Schema T derart erhalten, daß $T' = V$ ist.*

Es sei $\mathfrak{d} = \{++-+-\cdots+-\} \in S$ so gewählt, daß beim Ersetzen der Dreieckszeile $\mathfrak{d}'$ durch $\bar{\mathfrak{d}}' = \{---+\cdots+\}$ das Schema S' in V übergeht. Zwei Fälle sind zu unterscheiden.

α) Die Zeile $\mathfrak{d}_0 = \{+++++\cdots+-\}$ sei nicht in S vorhanden. $\mathfrak{d}$ ist wegen $U(S)' = U(S')$ beschränkt und besitzt nach Satz 14 mindestens drei Nachbarzeilen in S. Weil $\mathfrak{d}'$ Dreieckszeile von S' und $\mathfrak{d}_0 \notin S$ ist, hat $\mathfrak{d}$ genau drei Nachbarn, und zwar $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3$. Ersetzen wir $\mathfrak{d}$ durch $\bar{\mathfrak{d}}$, so entsteht das Schema $\bar{S} = T$ mit $T' = V$, denn hierbei wird in S' tatsächlich $\mathfrak{d}'$ durch $\bar{\mathfrak{d}}'$ ersetzt.

β) Jetzt sei auch $\mathfrak{d}_0 \in S$. Nach Satz 20 ist dann $\mathfrak{d}$ oder $\mathfrak{d}_0$ eine Dreieckszeile von S. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß etwa $\mathfrak{d}_0$ Dreieckszeile ist, die zur 2-ten, 3-ten und m-ten Spalte benachbart ist. Wir ersetzen nun $\mathfrak{d}_0$ durch $\bar{\mathfrak{d}}_0 = \{+--++\cdots++\}$ und erhalten dabei das Schema R. In R ist die Zeile $\mathfrak{d}$ nicht mehr zur letzten Spalte benachbart, daher eine Dreieckszeile von R, die zu den ersten drei Spalten benachbart ist. Vom Schema R gehen wir nun zu einem Schema T über, indem wir $\mathfrak{d}$ durch $\bar{\mathfrak{d}} = \{---+\cdots++\}$ ersetzen. Weil nach Satz 16 die Zeile $\bar{\mathfrak{d}}_0'$ in S' liegt, ist $S' = R'$. Beim Übergang von R zu T wird in $S' = R'$ die Zeile $\mathfrak{d}'$ durch $\bar{\mathfrak{d}}'$ ersetzt. Also ist $T' = V$.

Mit $N_i(S)$ bezeichnen wir die Menge aller Zeilen von S, die als i-te Komponente den Wert -1 haben.

Ergänzung zu Satz 21. *Wenn von S zusätzlich vorausgesetzt wird, daß $N_m(S) \subset U(S)$ ist, so wird auch $N_m(T) \subset U(T)$.*

Beweis. Wegen $N_m(S) \subset U(S)$ gilt $\mathfrak{d}_0 \notin S$, daher ist nur Fall α) zu betrachten; aus $\bar{\mathfrak{d}} \notin N_m(S)$ folgt sofort $N_m(T) \subset U(T) = U(S)$.

Satz 22. *Wenn $N_1(S') \subset U(S')$ und $\mathfrak{c} \in N_1(S)$ eine beschränkte Zeile von S ist, so ist $\mathfrak{c}$ zur 1-ten, zur letzten und zu höchstens zwei weiteren Spalten benachbart.*

α) Wäre $\mathfrak{c}$ nicht zur letzten Spalte benachbart, so folgte, daß mit $\mathfrak{c}' \in N_1(S)' = N_1(S') < U(S') = U(S)'$ auch $\mathfrak{c}$ unbeschränkt in S wäre.

β) Wäre $\mathfrak{c} = \{-+++\cdots++\}$ zu drei Spalten, die verschieden von der ersten und letzten sind, benachbart — etwa zur 2-ten, 3-ten und 4-ten —, so folgte für S' die Existenz der vier Zeilen

$$\begin{array}{l} -+++\cdots+ \\ --++\cdots+ \\ -+-+\cdots+ \\ -++-\cdots+ \end{array}$$

und wegen $N_1(S') < U(S')$ auch die der vier dazu reziproken. Streicht man alle Spalten bis auf die 2-te, 3-te und 4-te, so bleiben diese acht Zeilen verschieden entgegen der Eigenschaft [3, 7].

γ) Wäre $\mathfrak{c} = \{-+++\cdots++\}$ nicht zur ersten Spalte benachbart, so wäre die beschränkte Zeile $\mathfrak{c}$ nach α) und β) eine Dreieckszeile, die zur letzten und etwa zur 2-ten und 3-ten benachbart sei. Es folgte nach Satz 16, daß in S' die vier Zeilen

$$\begin{array}{l} -+++\cdots+ \\ --++\cdots+ \\ -+-+\cdots+ \\ ---+\cdots+ \end{array}$$

und wegen $N_1(S') < U(S')$ auch die vier dazu reziproken Zeilen vorkommen. Beim Streichen der $m-4$ letzten Spalten wird der Widerspruch mit Eigenschaft [3, 7] ersichtlich. Satz 22 ist bewiesen.

Satz 23. *Wenn $N_1(S) \not< U(S)$ aber $N_1(S') < U(S')$ gilt, so existiert eine Dreieckszeile im Schema S, die in $N_1(S)$ liegt und zur ersten und letzten Spalte benachbart ist.*

Für das realisierbare Schema Σ_4 ist Satz 23 gültig. Er sei bewiesen für die Spaltenanzahl $m-1$. Wegen $N_1(S) \not< U(S)$ existiert eine beschränkte Zeile $\mathfrak{c} = \{-1, c_2, c_3, \ldots, c_m\}$ im m-spaltigen Schema S. Wegen $m \geqq 5$ gibt es nach Satz 22 eine Spalte — angenommen die vorletzte —, zu der $\mathfrak{c}$ nicht benachbart ist. Das Streichen dieser $(m-1)$-ten Spalte wird jetzt mit $*$ symbolisiert. Wegen $U(S^*) = U(S)^*$ ist mit $\mathfrak{c}$ in S auch $\mathfrak{c}^*$ in S^* beschränkt, d.h.

$$N_1(S^*) \not< U(S^*).$$

Außerdem folgt aus $N_1(S') < U(S')$, daß auch

$$N_1(S^{*\prime}) = N_1(S')^* < U(S')^* = U(S^{*\prime})$$

ist. Die Voraussetzungen von Satz 23 sind daher für das $(m-1)$-spaltige Schema S^* erfüllt. Nach Induktionsvoraussetzung ist also eine Dreieckszeile $\{-1, d_2, \ldots, d_{m-2}, d_m\}$ in S vorhanden. Nach Satz 20 ist sodann eine der beiden Zeilen $\{-1, d_2, \ldots, d_{m-2}, \pm 1, d_m\}$ eine Dreieckszeile, die nach Satz 22 tatsächlich zur ersten und letzten Spalte benachbart ist.

Satz 24. *Mit Hilfe von endlich vielen aufeinanderfolgenden Dreieckstransformationen kann man jedes Schema S in ein Schema T mit $N_1(T) < U(T)$ verwandeln.*

Der Beweis wird wieder durch vollständige Induktion gewonnen. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine aus Schemata V_i gebildete Kette $S' = V_0, V_1, \ldots, V_r$, wobei V_i aus V_{i-1} durch eine Dreieckstransformation hervorgeht und $N_1(V_r) < U(V_r)$ ist. Nach r-maliger Anwendung von Satz 21 gewinnen wir eine Kette $S = S_0, S_1, \ldots, S_t$, wobei $S_t' = V_r$ ist und S_i aus S_{i-1} durch eine Dreieckstransformation erhalten wird ($r \leqq t \leqq 2r$). Für dieses S_t gilt $N_1(S_t') < U(S_t')$.

α) Falls $N_1(S_t) < U(S_t)$ ist, so setzen wir $S_t = T$ und es ist nichts mehr zu beweisen.

β) Falls $N_1(S_t) \not< U(S_t)$ ist, so ist für S_t der Satz 23 anwendbar; es existiert also eine Dreieckszeile $\mathfrak{d}_t$ in S_t, die mit -1 beginnt und zur ersten und letzten Spalte benachbart ist. Bezüglich dieser Dreieckszeile führen wir eine Dreieckstransformation von S_t in das neue Schema S_{t+1} aus. Da $\mathfrak{d}_t$ zur letzten Spalte benachbart war, gilt $S_t' = S_{t+1}'$ und daher wieder

$$N_1(S_{t+1}') < U(S_{t+1}').$$

Je nachdem ob $N_1(S_{t+1}) < U(S_{t+1})$ gilt oder nicht, tritt für S_{t+1} der Fall α) oder der Fall β) ein. Im Falle β) liefert Satz 23 wieder eine Dreieckszeile $\mathfrak{d}_{t+1} \in S_{t+1}$ und hiermit ein neues S_{t+2} usw. Bei diesem Verfahren muß nach endlich vielen Schritten der Fall α) eintreten, weil bei jedem Schritt die Anzahl der mit -1 beginnenden Zeilen abnimmt. Hiermit ist Satz 24 bewiesen.

Satz 25. *Wenn S ein Schema mit $N_1(S) < U(S) = U(\Sigma_m)$ und $'S = \Sigma_{m-1}$ ist, so gilt sogar $S = \Sigma_m$.*

Wir führen wieder vollständige Induktion nach m durch, wobei wir schon bei $m = 2$ beginnen können. Aus der Voraussetzung des zu beweisenden Satzes folgt

$$N_1(S') = N_1(S)' < U(S)' = U(S') = U(\Sigma_m)' = U(\Sigma_m') = U(\Sigma_{m-1})$$

und

$$'S' = \Sigma_{m-1}' = \Sigma_{m-2}.$$

Daher ist für das $(m-1)$-spaltige S' die Voraussetzung von Satz 25 erfüllt, somit wegen der Induktionsannahme auch $S' = \Sigma_{m-1}$. Wir behaupten zunächst, daß

$$S < \Sigma_m \tag{19}$$

gilt. Es sei das Gegenteil von (19) richtig, also eine Zeile $\mathfrak{z} \in S$ mit $\mathfrak{z} \notin \Sigma_m$ vorhanden. In $\mathfrak{z}$ muß ein Pluszeichen zwischen zwei Minuszeichen stehen, d.h. $\mathfrak{z}$ hat die Form $\mathfrak{z} = \{\cdots - \cdots + \cdots - \cdots\}$. Die Zeilen $\mathfrak{z}'$ und $'\mathfrak{z}$ sind jedoch nicht von dieser Form wegen $'S = \Sigma_{m-1} = S'$. Also folgt $\mathfrak{z} = \{- + + \cdots + + -\}$.

In S liegen somit die vier Zeilen (die vierte wegen $'S = \Sigma_{m-1}$ und $S' = \Sigma_{m-1}$):

$$\begin{array}{l} -++\cdots++- \\ -++\cdots+++ \\ ---\cdots--- \\ --+\cdots+++. \end{array}$$

Wegen $N_1(S) < U(S)$ sind auch die vier hierzu reziproken Zeilen in S. Wenn man die dritte bis $(m-1)$-te Spalte streicht, bleiben diese acht Zeilen verschieden. Hiermit ist (19) bewiesen. Weil für S und Σ_m die Bedingungen I und III gelten, folgt aus (19) sogar $S = \Sigma_m$, w. z. b. w.

Satz 26. *Ein Schema S mit $U(S) = U(\Sigma_m)$ läßt sich durch Anwendung endlich vieler Dreieckstransformationen in das Standardschema Σ_m überführen.*

Wir beweisen wieder mit Hilfe vollständiger Induktion nach m. Zunächst führen wir S nach Satz 24 durch Dreieckstransformationen in ein Schema T über mit $N_1(T) < U(T)$. Da hierbei alle unbeschränkten Zeilen unberührt bleiben, ist $U(T) = U(S) = U(\Sigma_m)$. Wegen

$$U('T) = 'U(T) = 'U(\Sigma_m) = U('\Sigma_m) = U(\Sigma_{m-1})$$

läßt sich $'T$ nach Induktionsvoraussetzung durch etwa r Dreieckstransformationen in das Schema Σ_{m-1} überführen. Nach r-maliger Anwendung von Satz 21 ergibt sich, daß man T durch Dreieckstransformationen in ein Schema V überführen kann mit $'V = \Sigma_{m-1}$. Wegen $N_1(T) < U(T)$ folgt mit Hilfe der Ergänzungsbemerkung von Satz 21, daß auch $N_1(V) < U(V)$ gilt. Wegen Satz 25 ist $V = \Sigma_m$, w. z. b. w.

Aus den Sätzen 10, 26, 18 und 19 folgt endlich, daß die drei Bedingungen I, II, III von Satz 1 der Einleitung tatsächlich auch hinreichend sind für die Realisierbarkeit eines Schemas $S(m \neq 4)$.

§ 4. Bemerkungen, geradlinige Realisierbarkeit, offene Fragen

Es sei zunächst kurz darauf hingewiesen, daß man in Satz 1 nicht etwa eine der drei Bedingungen weglassen darf. Mit Ω bezeichnen wir die Menge aller Zeilen mit der Länge $m > 4$, die höchstens zwei Minuszeichen enthalten. Für dieses Ω sind die beiden Bedingungen I und III erfüllt, auch Satz 12 von der Existenz der Zwischenzeile gilt, und Ω hat überdies die Eigenschaft $\left[h, \frac{h(h+1)}{2} + 1\right]$ für $h = 1, 2, \ldots, m$. Trotzdem ist Ω kein realisierbares Schema, weil $U(\Omega)$ leer ist. Wenn man aus einem realisierbaren Schema eine beschränkte Zeile, die keine Dreieckszeile ist, entfernt, so erhält man ein Schema, das zwar den Bedingungen I und II genügt, aber nicht realisierbar ist.

Die drei Bedingungen von Satz 1 lassen sich leicht auf die Zerlegungen des n-dimensionalen Raumes durch Pseudohyperebenen in allgemeiner Lage übertragen, indem man einfach die Eigenschaften $[3, 7]$ bzw. $[3, 6]$ durch die Eigenschaften $[n+1, 2^{n+1}-1]$ bzw. $[n+1, 2^{n+1}-2]$ ersetzt. Für $n > 2$ sind die drei Bedingungen jedoch nur notwendig, nicht hinreichend. Bereits

bei Satz 6 erkennt man, daß sich auch die Beweismethoden nicht ohne weiteres ins n-dimensionale übertragen lassen. Bleiben wir wieder bei $n = 2$.

Vom geometrischen Standpunkt erscheint es nunmehr wünschenswert, notwendige und hinreichende Bedingungen auch für die geradlinig realisierbaren Matrizen zu finden. Dieses Problem hängt augenscheinlich eng zusammen mit der Gewinnung eines Überblicks über alle ebenen Schließungssätze und dürfte daher schwierig sein. Wir begnügen uns hier damit, an Beispielen zu zeigen, daß es einfache Konfigurationen von Pseudogeraden gibt, die sich nicht strecken lassen.

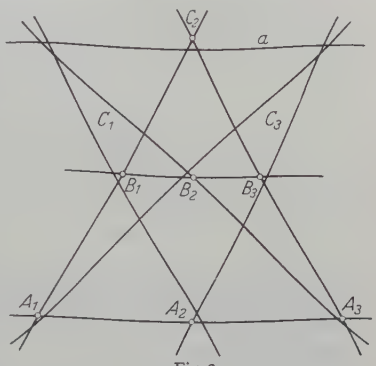

Fig. 3

Die durch Fig. 3 mitgeteilte Konfiguration von 9 Pseudogeraden läßt sich durch Hinzunahme von weiteren Schnittpunkten (die außerhalb des Zeichenblattes fielen und sowieso hier nicht interessieren) zu einer einfachen Konfiguration von 9 Pseudogeraden ergänzen. Diese Verlängerung der Pseudogeraden sei in irgendeiner Weise vorgenommen. Wir behaupten, die entstehende einfache Konfiguration läßt sich nicht strecken. Zum Beweis nehmen wir im Gegenteil an, daß 9 Geraden existieren, die die Ebene kombinatorisch wie in Fig. 3 zerlegen. Die Streckung sei also schon vollzogen und Fig. 3 stelle bereits 9 Geraden dar. Wir betrachten die 6 Schnittpunkte $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$. Die Verbindungsgerade der beiden Punkte A_i, B_k werde mit (A_i, B_k) bezeichnet.

Der Schnittpunkt von (A_1, B_1) mit (A_3, B_3) heiße C_2,
der Schnittpunkt von (A_2, B_3) mit (A_1, B_2) heiße C_3,
der Schnittpunkt von (A_3, B_2) mit (A_2, B_1) heiße C_1.

Der Punkt C_2 ist zugleich auch ein Schnittpunkt der Konfiguration. Der Punkt C_3 bzw. C_1 muß dem mit C_3 bzw. C_1 bezeichneten viereckigen Gebiet (Durchschnitt von vier Halbebenen) angehören. Nach dem Satz von PAPPUS-PASCAL liegen die drei Punkte C_1, C_2, C_3 auf einer Geraden.

Die drei Geraden a, (A_1, B_1), (A_3, B_3) zerlegen die Ebene in sieben Gebiete. Drei dieser Gebiete sind als Durchschnitt von nur *zwei* Halbebenen darstellbar. Jede beliebige vierte Gerade ist fremd zur abgeschlossenen Hülle eines dieser drei Gebiete. Es kann also keine Gerade durch C_1, C_2, C_3 existieren.

Ebenso ist die in Fig. 4 dargestellte Konfiguration nicht streckbar, was man in ähnlicher Weise durch Zurückführung auf den Satz von DESARGUES beweisen kann.

Außer den Aufgaben, die durch den bisherigen Inhalt der Arbeit berührt wurden, sei nun auf folgende noch offene Fragen hingewiesen.

Wenn man die Ebene an einer beliebigen Geraden a spiegelt, so geht eine einfache Konfiguration $\mathfrak{K}$ in eine äquivalente Konfiguration $\mathfrak{K}^a$ über. Es seien $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ zwei äquivalente einfache Konfigurationen von Pseudogeraden. Es ist nicht schwer, zu zeigen, daß sich $\mathfrak{K}$ durch eine stetige Deformation in die Konfiguration $\mathfrak{L}$ oder $\mathfrak{L}^a$ überführen läßt, d.h. daß für jede reelle Zahl t mit $0 \leq t \leq 1$ eine sich mit t stetig ändernde Konfiguration $\mathfrak{K}_t$ derart gefunden werden kann, daß $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{L}$ oder $\mathfrak{L}^a$ ist. Wenn $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ geradlinige einfache Konfigurationen sind, erhebt sich die Frage, ob sich dann die Deformation geradlinig durchführen läßt, d.h. so, daß alle $\mathfrak{K}_t$ auch geradlinig sind.

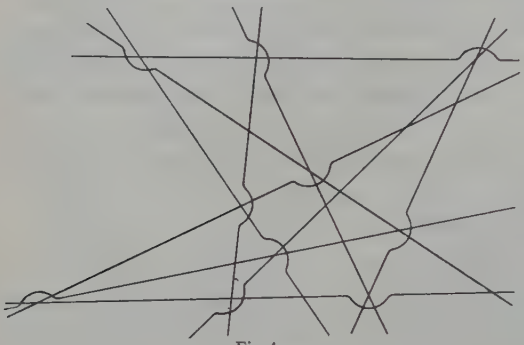

Fig. 4

Kann man zu einer einfachen Konfiguration $\mathfrak{K}$ von m Geraden eine dazu äquivalente finden, bei der die Winkel zwischen den m Geraden beliebig vorgegeben sind?

Läßt sich zu $\mathfrak{K}$ und zu m vorgegebenen Punkten $P_1, \ldots, P_m$ eine mit $\mathfrak{K}$ äquivalente Konfiguration von Geraden $g_1, \ldots, g_m$ derart finden, daß P_i auf g_i liegt? Diese Frage könnte auch unter Verzicht auf die Reihenfolge der Punkte gestellt werden.

Bonn, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 16. April 1955)

Perron, O.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 103—114 (1956)

Über Potenzsummen

Von
Oskar Perron

§ 1. Ziel der Arbeit

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die symmetrischen Grundfunktionen von n Variabeln (Unbestimmten) $x_1, \ldots, x_n$, also

$$\prod_{\nu=1}^{n}(1 - x_\nu t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n, \tag{1.1}$$

und seien s_ν die Potenzsummen

$$s_\nu = x_1^\nu + x_2^\nu + \cdots + x_n^\nu. \tag{1.2}$$

Im Anschluß an eine Arbeit von Herrn Pólya habe ich kürzlich einen Beweis für den Satz erbracht, daß die ersten n Potenzsummen mit ungeradem Index $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$ ein Fundamentalsystem für die symmetrischen Funktionen bilden, d.h., daß die a_ν und folglich alle symmetrischen Funktionen sich rational durch sie darstellen lassen, habe explizite Formeln für die a_ν hergeleitet und außerdem die irreduzible zwischen den $n+1$ Polynomen $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}, s_{2n+1}$ bestehende Abhängigkeit angegeben[1]). An Literatur war mir außer Pólya nur noch eine von Pólya zitierte Arbeit von Laguerre bekannt. Inzwischen hat mich aber Herr Ostrowski darauf aufmerksam gemacht, daß das Problem schon mehrfach behandelt worden ist. Zunächst hat bereits Borchardt den obigen Satz über $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$ bewiesen[2]). Sodann hat Vahlen einen neuen Beweis dafür erbracht und zugleich die folgende Verallgemeinerung bewiesen[3]): Ist k eine ganze Zahl $\geqq 2$ und sind $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ die ersten n natürlichen Zahlen, die keine Multipla von k sind, so bilden die Polynome $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_n}$ ein Fundamentalsystem für die symmetrischen Funktionen. Ein weiteres Fundamentalsystem hat B. von Ludwig angegeben[4]) und schließlich hat Kakeya das folgende abschließende Ergebnis gewonnen[5]): Die n Potenzsummen $s_{\mu_1}, \ldots, s_{\mu_n}$ bilden dann und nur dann ein Fundamentalsystem, wenn die nach Weglassen von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verbleibende

[1]) Perron, O.: Über die Abhängigkeit von Potenzsummen und einen Satz von Pólya. Math. Z. **63**, 19—30 (1955).

[2]) Borchardt, C. W.: Über eine Eigenschaft der Potenzsummen ungerader Ordnung. Monatsberichte der Berliner Akademie 1857 = Gesammelte Werke, S. 107—118.

[3]) Vahlen, K. Th.: Über Fundamentalsysteme für symmetrische Funktionen. Acta Mathematica **23**, 91—120 (1900).

[4]) Ludwig, Bernhard v.: Ein neues Fundamentalsystem für symmetrische Funktionen. Math. Ann. **83**, 67—69 (1921).

[5]) Kakeya, Sôichi: On fundamental systems of symmetric functions. I, II. Jap. J. Math. **2**, 69—80 (1925); **4**, 77—85 (1927).

Menge natürlicher Zahlen so beschaffen ist, daß die Summe von je zweien auch dazu gehört (modern ausgedrückt: wenn diese Menge eine additive Halbgruppe bildet).

Bis zur formelmäßigen Darstellung der a_ν ist keiner der Autoren vorgedrungen. Der Beweis von KAKEYA ist als reiner Existenzbeweis besonders einfach und elegant, aber ich sehe keine Möglichkeit, ihn so zu modifizieren, daß er zu expliziten Formeln führt. Dagegen ist mir für den Spezialfall von VAHLEN ein neuer Beweis gelungen, der auch fertige Formeln für die a_ν liefert. Er soll im folgenden dargestellt werden.

Anschließend wird in § 5 ein damit zusammenhängendes Gleichungssystem und die Vielfachheit seiner verschiedenen Lösungen untersucht.

§ 2. Die Irreduzibilität gewisser Polynome

I. In diesem Paragraphen bedeuten die s_ν keine Potenzsummen, sondern Unbestimmte über dem Körper $\mathfrak{k}$ der komplexen Zahlen, die erst in § 4 zu Potenzsummen spezialisiert werden.

Sei k eine ganze Zahl $\geqq 2$ und seien $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ die der Größe nach geordneten natürlichen Zahlen, die nach Ausschluß der Multipla von k verbleiben, also die Zahlen

$$1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, 2k-1, 2k+1, \ldots, 3k-1, 3k+1, \ldots.$$

Um für ν_m einen Ausdruck zu finden, bezeichnen wir mit a die größte in dem Bruch $\frac{m-1}{k-1}$ enthaltende ganze Zahl

$$a = \left[\frac{m-1}{k-1}\right]$$

und setzen

$$m - 1 = a(k-1) + \varrho,$$

wo dann $0 \leqq \varrho < k-1$ ist. Dann ist

$$\nu_{a(k-1)} = ak - 1, \quad \nu_{a(k-1)+1} = ak + 1, \ldots,$$
$$\nu_m = \nu_{a(k-1)+1+\varrho} = ak + 1 + \varrho = m + a,$$

und somit allgemein

$$\nu_m = m + \left[\frac{m-1}{k-1}\right]. \tag{2.1}$$

Insbesondere ist natürlich $\nu_1 = 1$ bei jedem k.

II. Nun sei ε eine primitive k-te Einheitswurzel und seien $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, s_{\nu_3}, \ldots$ Unbestimmte über dem Körper $\mathfrak{k}$ der komplexen Zahlen. Wir bilden von ihnen Polynome $w_1, w_2, w_3, \ldots$ rekurrent mittels der Formeln:

$$\left\{\begin{aligned}
&w_1 = s_1(1-\varepsilon),\\
&2w_2 = w_1 s_1(1-\varepsilon) + s_2(1-\varepsilon^2),\\
&3w_3 = w_2 s_1(1-\varepsilon) + w_1 s_2(1-\varepsilon^2) + s_3(1-\varepsilon^3),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&mw_m = w_{m-1}s_1(1-\varepsilon) + w_{m-2}s_2(1-\varepsilon^2) + \cdots + w_1 s_{m-1}(1-\varepsilon^{m-1}) + s_m(1-\varepsilon^m),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

Hier kommen wirklich bloß die s mit den Indizes $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ vor und kein s mit einem andern, also durch k teilbaren Index, weil ja bei $s_{\alpha k}$ der Faktor $1-\varepsilon^{\alpha k}=0$ steht. Die so definierten w_m sind hiernach Polynome der $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, s_{\nu_3}, \ldots$, und offenbar ist w_m isobar vom Gewicht m, d.h., in jedem Glied ist die Summe der Indizes der vorkommenden s gleich m. Augenscheinlich enthält w_m das Glied $\frac{1}{m} \cdot s_m(1-\varepsilon^m)$, welches aber nur dann von Null verschieden ist, wenn m kein Multiplum von k ist. Wenn zur Abkürzung

$$s_\nu(1-\varepsilon^\nu)=\sigma_\nu \tag{2.3}$$

gesetzt wird, ist z.B.

$$\begin{cases} w_1=\sigma_1, \quad w_2=\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2), \quad w_3=\frac{1}{6}(\sigma_1^3+3\sigma_1\sigma_2+2\sigma_3), \\ w_4=\frac{1}{24}(\sigma_1^4+6\sigma_1^2\sigma_2+8\sigma_1\sigma_3+3\sigma_2^2+6\sigma_4). \end{cases} \tag{2.4}$$

Dabei ist natürlich

$$\sigma_k=0, \quad \sigma_{2k}=0, \quad \sigma_{3k}=0, \ldots. \tag{2.5}$$

Nun bilden wir für jede natürliche Zahl m die m-reihige Determinante W_m, deren r-te Zeile so aussieht:

$$w_{\nu_r}, w_{\nu_r-1}, w_{\nu_r-2}, w_{\nu_r-3}, \ldots,$$

wobei also die Indizes der w von ν_r angefangen der Reihe nach jeweils um 1 abnehmen und wobei nach w_1 (falls $\nu_r<m$) noch $1-\varepsilon^{\nu_r}$ kommen soll und danach (falls $\nu_r<m-1$) noch $m-1-\nu_r$ Nullen. Für $k=3$ ist z.B. $\nu_1=1$, $\nu_2=2$, $\nu_3=4$, $\nu_4=5$, $\nu_5=7$ und

$$W_1=w_1, \quad W_3=\begin{vmatrix} w_1 & 1-\varepsilon & \\ w_2 & w_1 & 1-\varepsilon^2 \\ w_4 & w_3 & w_2 \end{vmatrix}, \quad W_5=\begin{vmatrix} w_1 & 1-\varepsilon & & & \\ w_2 & w_1 & 1-\varepsilon^2 & & \\ w_4 & w_3 & w_2 & w_1 & 1-\varepsilon^4 \\ w_5 & w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \\ w_7 & w_6 & w_5 & w_4 & w_3 \end{vmatrix},$$

wo die leeren Felder durch Nullen zu besetzen sind. W_m ist ein Polynom von $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{\nu_m}$, also mittelbar von $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_m}$, und zwar beidemal isobar vom Gewicht

$$G_m=\nu_1+(\nu_2-1)+(\nu_3-2)+(\nu_4-3)+\cdots+(\nu_m-m+1).$$

Wegen (2.1) ist dann

$$G_m=\left(1+\left[\frac{0}{k-1}\right]\right)+\left(1+\left[\frac{1}{k-1}\right]\right)+\left(1+\left[\frac{2}{k-1}\right]\right)+\cdots+\left(1+\left[\frac{m-1}{k-1}\right]\right).$$

Setzt man wieder $m-1=a(k-1)+\varrho$, wo $0\leqq\varrho<k-1$, so ist also

$$\begin{aligned} G_m &= m+(k-1)\cdot 0+(k-1)\cdot 1+\cdots+(k-1)\cdot(a-1)+(\varrho+1)\cdot a \\ &= m+(k-1)\cdot\frac{a(a-1)}{2}+(m-a(k-1))\cdot a \\ &= m(a+1)-(k-1)\cdot\frac{a(a+1)}{2}, \end{aligned}$$

somit schließlich

$$G_m = m \cdot \left(\left[\frac{m-1}{k-1}\right] + 1\right) - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{m-1}{k-1}\right] \cdot \left(\left[\frac{m-1}{k-1}\right] + 1\right) \cdot (k-1). \tag{2.6}$$

III. Es soll jetzt bewiesen werden, daß W_m ein nicht identisch verschwindendes und *absolut irreduzibles* Polynom von $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_m}$ ist. Für $W_1 = w_1 = s_1(1-\varepsilon)$ ist das klar. Nun hängt von den in der Determinante W_m vorkommenden w_λ nur das links unten stehende w_{ν_m} von s_{ν_m} ab, und zwar linear, indem es das Glied $\frac{1}{\nu_m} \cdot s_{\nu_m}(1-\varepsilon^{\nu_m})$ enthält; dieses ist von Null verschieden, weil ε eine *primitive* k-te Einheitswurzel und ν_m nicht durch k teilbar ist. Alle andern in W_m vorkommenden w_λ sind von s_{ν_m} unabhängig. Infolgedessen hat W_m die Gestalt

$$W_m = (-1)^{m-1} \cdot \frac{1}{\nu_m} s_{\nu_m}(1-\varepsilon^{\nu_m}) P_m + Q_m, \tag{2.7}$$

wo P_m und Q_m von s_{ν_m} frei sind und speziell P_m eine $(m-1)$-reihige Unterdeterminante ist. Diese reduziert sich für $m \leqq k$ auf ihr Diagonalglied

$$\prod_{\lambda=1}^{m-1}(1-\varepsilon^\lambda),$$

das von Null verschieden ist, weil ε eine *primitive* k-te Einheitswurzel ist. Für $m \leqq k$ tritt also s_{ν_m} in W_m nur linear mit einem konstanten von Null verschiedenen Koeffizienten auf und infolgedessen ist W_m absolut irreduzibel.

Für $m > k$ ist in den obersten $k-1$ Zeilen von P_m nur eine einzige von Null verschiedene Determinante enthalten und diese reduziert sich auf ihr Diagonalglied $\prod_{\lambda=1}^{k-1}(1-\varepsilon^\lambda)$. Daher ist

$$P_m = \prod_{\lambda=1}^{k-1}(1-\varepsilon^\lambda) \cdot D_m, \tag{2.8}$$

wo D_m eine $(m-k)$-reihige Determinante ist, deren r-te Zeile aus den Elementen

$$w_{\nu_{r+k-1}-k},\ w_{\nu_{r+k-1}-k-1},\ w_{\nu_{r+k-1}-k-2},\ w_{\nu_{r+k-1}-k-3}, \ldots$$

besteht, wobei nach w_1 (falls $\nu_{r+k-1} - k < m-k$) noch $1-\varepsilon^{\nu_{r+k-1}}$ kommt und dann nur noch Nullen. Vermöge (2.1) ist aber $\nu_{r+k-1} - k = \nu_r$, so daß das die Elemente

$$w_{\nu_r},\ w_{\nu_r-1},\ w_{\nu_r-2},\ w_{\nu_r-3}, \ldots$$

sind, und nach w_1 kommt

$$1 - \varepsilon^{\nu_{r+k-1}} = 1 - \varepsilon^{\nu_{r+k-1}-k} = 1 - \varepsilon^{\nu_r}.$$

Infolgedessen ist D_m gerade die Determinante W_{m-k}, also

$$P_m = \prod_{\lambda=1}^{k-1}(1-\varepsilon^\lambda) \cdot W_{m-k}. \tag{2.9}$$

Somit ist W_m in bezug auf s_{ν_m} linear, und s_{ν_m} hat den Koeffizienten cW_{m-k}, wo c eine von Null verschiedene Konstante ist. Daher müßte, wenn W_m in zwei Faktoren zerfiele, der eine zugleich ein Teiler von W_{m-k} sein.

Nun können wir vollständige Induktion anwenden und annehmen, daß W_{m-k} bereits als absolut irreduzibel erkannt ist. Dann ergibt sich, daß W_m, falls reduzibel, durch W_{m-k} teilbar sein muß. Wir werden zeigen, daß letzteres nicht zutrifft, womit die Irreduzibilität von W_m bewiesen sein wird.

Nun enthält die Determinante W_m, wie sich durch Entwicklung nach den Unterdeterminanten der vorderen zwei Spalten ergibt, den Bestandteil

$$(2.10) \qquad (-1)^m \begin{vmatrix} w_1 & 1-\varepsilon \\ w_{\nu_m} & w_{\nu_m-1} \end{vmatrix} \cdot \frac{P_m}{1-\varepsilon}.$$

Dieser ist nach (2.9) durch W_{m-k} teilbar, und wir brauchen nur noch zu zeigen, daß der Restbestandteil nicht durch W_{m-k} teilbar ist. Zu dem Zweck prüfen wir, in welcher Weise $s_{\nu_{m-1}}$ in W_m vorkommt. Zunächst kommt $s_{\nu_{m-1}}$ in w_{ν_m} und in w_{ν_m-1}, also in dem uns nicht mehr interessierenden Bestandteil (2.10) vor. Außerdem kommt $s_{\nu_{m-1}}$ nur noch in $w_{\nu_{m-1}}$ vor, und zwar linear. Nun kommt aber, falls ν_m nicht von der Form $\alpha k+1$, also $\nu_{m-1}=\nu_m-1$ ist, $w_{\nu_{m-1}}$ in dem Restbestandteil von W_m nur linear vor, weil das Produkt $w_{\nu_{m-1}} \cdot w_{\nu_m-1} = w_{\nu_{m-1}}^2$ in W_m als Koeffizienten eine $(m-2)$-reihige Unterdeterminante hat, deren erste Zeile aus lauter Nullen besteht. Falls aber ν_m von der Form $\alpha k+1$, also $\nu_{m-1}=\alpha k-1=\nu_m-2$ ist, dann hat in W_m das Produkt

$$w_{\nu_{m-1}} \cdot (1-\varepsilon) \cdot w_{\nu_m-2} = w_{\nu_{m-1}}^2 \cdot (1-\varepsilon),$$

wenn wir zunächst vom Fall $k=2$ absehen, als Koeffizienten eine $(m-3)$-reihige Unterdeterminante, deren erste Zeile aus lauter Nullen besteht[6]).

Es tritt also in jedem Fall (abgesehen vom Fall $k=2$) $s_{\nu_{m-1}}$ in W_m außer in dem Bestandteil (2.10) nur linear auf und hat in dem Restbestandteil augenscheinlich den Koeffizienten

$$(-1)^m \cdot \frac{1}{\nu_{m-1}} \cdot (1-\varepsilon^{\nu_{m-1}}) \cdot P_m',$$

wo P_m' analog wie vorhin P_m die Gestalt

$$P_m' = \prod_{\lambda=1}^{k-1} (1-\varepsilon^{\lambda}) \cdot D_m'$$

hat, und es genügt, zu zeigen, daß D_m' nicht durch W_{m-k} teilbar ist. Dabei ist aber D_m' eine $(m-k)$-reihige Determinante, die sich von D_m nur durch ihre letzte Zeile unterscheidet, wo jetzt die Elemente

$$w_{\nu_m-k},\ w_{\nu_m-k-1},\ w_{\nu_m-k-2},\ \cdots,\ w_{\nu_m-m+1}$$

stehen, oder, was dasselbe ist, die Elemente

$$w_{\nu_{m-k+1}},\ w_{\nu_{m-k+1}-1},\ w_{\nu_{m-k+1}-2},\ \cdots,\ w_{\nu_{m-k+1}-(m-k-1)}.$$

[6]) Auch der Fall $m=k=3$ wäre hier auszuschließen. Aber der interessiert nicht, weil der Fall $m=k$ ja schon erledigt ist.

Daher ist D'_m linear in $s_{\nu_{m-k+1}}$, und der Koeffizient von $s_{\nu_{m-k+1}}$ ist,

$$\text{falls } m \leqq 2k: \quad (-1)^{m-k-1} \cdot \frac{1}{\nu_{m-k+1}} \cdot (1-\varepsilon^{\nu_{m-k+1}}) \cdot \prod_{\lambda=1}^{m-k-1} (1-\varepsilon^{\lambda}),$$

$$\text{falls } m > 2k: \quad (-1)^{m-k-1} \cdot \frac{1}{\nu_{m-k+1}} \cdot (1-\varepsilon^{\nu_{m-k+1}}) \cdot \prod_{\lambda=1}^{k-1} (1-\varepsilon^{\lambda}) \cdot W_{m-2k},$$

also gewiß nicht durch W_{m-k} teilbar. Daher ist auch D'_m nicht durch W_{m-k} teilbar, w. z. b. w.

Es bleibt noch der Fall $k=2$ zu erledigen. Hier ist zunächst

$$W_2 = \begin{vmatrix} w_1 & 2 \\ w_3 & w_2 \end{vmatrix} = w_1 w_2 - 2w_3 = \frac{4}{3}(s_1^3 - s_3),$$

und das ist irreduzibel. Für $m>2$ aber ist

$$W_m = \begin{vmatrix} w_1 & 2 & & & \\ w_3 & w_2 & w_1 & 2 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{2m-3} & w_{2m-4} & w_{2m-5} & w_{2m-6} & \cdots\ w_{m-2} \\ w_{2m-1} & w_{2m-2} & w_{2m-3} & w_{2m-4} & \cdots\ w_m \end{vmatrix}.$$

Daher tritt in W_m das Quadrat w_{2m-3}^2 auf und folglich auch das Quadrat s_{2m-3}^2. Wäre nun W_m durch $W_{m-k}=W_{m-2}$ teilbar, so müßte auch der Koeffizient von s_{2m-3}^2 durch W_{m-2} teilbar sein. Er ist aber, wie man sofort erkennt, für $m=3$ und $m=4$ eine von Null verschiedene Konstante und für $m>4$ bis auf einen von Null verschiedenen Zahlenfaktor gleich W_{m-4}, also gewiß nicht durch W_{m-2} teilbar.

§ 3. Ein Desideratum

Da ε als primitive k-te Einheitswurzel einer irreduzibeln Gleichung vom Grad $\varphi(k)$ genügt, läßt sich W_m in der Gestalt

$$W_m = U_{m0} + U_{m1}\varepsilon + U_{m2}\varepsilon^2 + \cdots + U_{mr}\varepsilon^r \qquad (r=\varphi(k)-1) \tag{3.1}$$

schreiben, wo die $U_{m\nu}$ Polynome von $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_m}$ mit *rationalen* Koeffizienten sind. W_m hängt also insbesondere auch von ε ab und wird sich ändern, wenn man für ε eine andere primitive k-te Einheitswurzel wählt. Wir werden in § 4 sehen, daß die Gleichung $W_m=0$ eine von ε ganz unabhängige Beziehung zwischen den $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_m}$ zum Ausdruck bringt, woraus folgt, daß die obigen Polynome $U_{m0}, U_{m1}, \ldots, U_{mr}$ sich nur um rationale Zahlenfaktoren unterscheiden können, so daß es für W_m auch eine Darstellung in der Form

$$W_m = U_m \cdot f_m(\varepsilon) \tag{3.2}$$

gibt, wo U_m ein Polynom von $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_m}$ mit rationalen Koeffizienten und $f_m(\varepsilon)$ eine Zahl aus dem Körper der k-ten Einheitswurzeln ist. Es ist mir aber nicht gelungen, W_m in diese (nicht nur vermutete, sondern sicher

existierende) Form überzuführen, und die Rechnung ist selbst für kleine Werte von k und m schon ziemlich mühsam. Man findet z. B.

$$\text{für } k=2\colon\ W_3=\begin{vmatrix} w_1 & 2 & \\ w_3 & w_2 & w_1 \\ w_5 & w_4 & w_3 \end{vmatrix}=\frac{8}{45}(s_1^6-5s_1^3s_3-5s_3^2+9s_1s_5),$$

$$\text{für } k=3\colon\ W_3=\begin{vmatrix} w_1 & 1-\varepsilon & \\ w_2 & w_1 & 1-\varepsilon^2 \\ w_4 & w_3 & w_2 \end{vmatrix}=\frac{3}{8}(s_1^4-2s_1^2s_2-s_2^2+2s_4)\cdot(1-\varepsilon),$$

$$\text{für } k>3\colon\ W_3=\begin{vmatrix} w_1 & 1-\varepsilon & \\ w_2 & w_1 & 1-\varepsilon^2 \\ w_3 & w_2 & w_1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}(s_1^3-3s_1s_2+2s_3)(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^3).$$

Für $m<k$, in welchem Fall $\nu_r=r$ für $1\leqq r\leqq m$ ist, werden wir in § 4 ganz allgemein schließen können, daß

$$(3.3)\qquad W_m=\begin{vmatrix} s_1 & 1 & & & \\ s_2 & s_1 & 2 & & \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m-1} & s_{m-2} & s_{m-3} & s_{m-4}\cdots & s_1 \quad m-1 \\ s_m & s_{m-1} & s_{m-2} & s_{m-3}\cdots & s_2 \quad s_1 \end{vmatrix}\cdot\frac{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\cdots(1-\varepsilon^m)}{m!}\qquad(\text{für } m<k)$$

ist. Doch ist es mir selbst in diesem Fall nicht gelungen, die Determinante W_m durch irgendwelche Umformungen in die neue Gestalt überzuführen.

§ 4. Potenzsummen

I. Wir spezialisieren jetzt die s_ν zu den Potenzsummen von n Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$, deren symmetrische Grundfunktionen wir mit $a_1, \ldots, a_n$ bezeichnen. Dann gelten die Formeln (1.1) und (1.2), und wenn wir das Polynom in (1.1) zur Abkürzung mit $F(t)$ bezeichnen, ergibt sich durch logarithmische Ableitung die formale Potenzreihenentwicklung

$$(4.1)\qquad \frac{F'(t)}{F(t)}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{-x_\nu}{1-x_\nu t}=-(s_1+s_2t+s_3t^2+s_4t^3+\cdots).$$

Setzt man, unter ε wieder eine primitive k-te Einheitswurzel verstehend,

$$(4.2)\qquad \frac{F(\varepsilon t)}{F(t)}=1+w_1t+w_2t^2+w_3t^3+\cdots,$$

so erhält man durch logarithmische Ableitung die Formel

$$(4.3)\qquad \begin{cases} \dfrac{w_1+2w_2t+3w_3t^2+\cdots}{1+w_1t+w_2t^2+w_3t^3+\cdots}=\dfrac{\varepsilon F'(\varepsilon t)}{F(\varepsilon t)}-\dfrac{F'(t)}{F(t)} \\ \qquad=s_1(1-\varepsilon)+s_2(1-\varepsilon^2)t+s_3(1-\varepsilon^3)t^2+s_4(1-\varepsilon^4)t^3+\cdots. \end{cases}$$

Indem man hier mit dem Nenner heraufmultipliziert und gleiche Potenzen von t beiderseits vergleicht, erhält man das Formelsystem (2.2) und erkennt so, daß die durch (4.2) definierten w_λ gerade diejenigen Polynome der s_ν sind, die schon in § 2 so bezeichnet wurden. Insbesondere kommen also nur diejenigen s vor, deren Index nicht durch k teilbar ist, also $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, s_{\nu_3}, \ldots$.

Nun folgt aus (4.2), indem man mit dem Nenner heraufmultipliziert und speziell die Koeffizienten von t^{ν_r} links und rechts einander gleich setzt,

$$(4.4) \qquad w_{\nu_r} + a_1 w_{\nu_r - 1} + a_2 w_{\nu_r - 2} + \cdots + a_{\nu_r - 1} w_1 + a_{\nu_r}(1 - \varepsilon^{\nu_r}) = 0,$$

wobei diejenigen a_ν, deren Index größer als n ist, durch 0 zu ersetzen sind. Schreibt man diese Gleichung für $r = 1, 2, \ldots, n$ hin, so hat man ein lineares Gleichungssystem für $a_1, a_2, \ldots, a_n$, aus dem sich diese Größen, also die symmetrischen Grundfunktionen von $x_1, \ldots, x_n$, sofort als Determinantenquotienten ergeben. Der gemeinsame Nenner ist dabei gerade die zum Element $w_{\nu_{n+1}}$ gehörige Unterdeterminante von W_{n+1}, also nach den Feststellungen des § 2 (mit m an Stelle von $n+1$) im Fall $n+1 \leqq k$ eine Konstante und im Fall $n+1 > k$ bis auf einen konstanten Faktor gleich W_{n+1-k} und somit unabhängig von

$$s_{\nu_{n+2-k}}, \; s_{\nu_{n+3-k}}, \; \ldots, \; s_{\nu_n}.$$

Damit ist der Satz von VAHLEN *erneut bewiesen und zugleich eine formelmäßige Darstellung der $a_1, \ldots, a_n$ durch $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_n}$ gewonnen.* Das Gewicht der Nennerdeterminante W_{n+1-k} (im Fall $n+1 > k$) ist nach § 2 gleich

$$G_{n+1-k} = (n+1-k) \cdot \left[\frac{n-1}{k-1} \right] - \frac{1}{2} \cdot \left(\left[\frac{n-1}{k-1} \right] - 1 \right) \cdot \left[\frac{n-1}{k-1} \right] \cdot (k-1),$$

und wegen der Irreduzibilität von W_{n+1-k} *gibt es keine Darstellung mit einem gemeinsamen Nenner von kleinerem Gewicht.*

II. Schreibt man die Gl. (4.4) für $r = 1, 2, \ldots, n+1$ auf, so kann man aus diesen $n+1$ Gleichungen die Größen $a_1, \ldots, a_n$ eliminieren und erhält

$$W_{n+1} = 0.$$

Das ist nun die Abhängigkeit, die zwischen den $n+1$ Potenzsummen $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_{n+1}}$ besteht. Sie ist von der Höhe (dem Gewicht)

$$G_{n+1} = (n+1) \cdot \left(\left[\frac{n}{k-1} \right] + 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{n}{k-1} \right] \cdot \left(\left[\frac{n}{k-1} \right] + 1 \right) \cdot (k-1),$$

und wegen der Irreduzibilität von W_{n+1} gibt es keine Abhängigkeit von kleinerer Höhe. Insbesondere für $k = 2$ kommt die Höhe

$$(n+1)(n+1) - \tfrac{1}{2} n (n+1) = \tfrac{1}{2} (n+1)(n+2)$$

in Übereinstimmung mit meiner oben zitierten Arbeit. Dort konnte ich übrigens a priori zeigen, daß eine Abhängigkeit von kleinerer Höhe nicht existiert, und daraus die Irreduzibilität von W_m folgern. Für $k > 2$ ist mir ein analoger a-priori-Beweis nicht gelungen. Sobald er gelingt, wird der ganze Irreduzibilitätsbeweis des § 2 entbehrlich.

III. Wenn zwischen irgendwelchen Polynomen mit rationalen Koeffizienten eine Abhängigkeit besteht, so besteht gewiß auch eine mit rationalen Koeffizienten[7]). Insbesondere muß also die irreduzible Abhängigkeit zwischen $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_{n+1}}$ rationale Koeffizienten haben. Da diese Abhängigkeit aber durch die Gleichung $W_{n+1}=0$ gegeben ist, in der die k-te Einheitswurzel ε auftritt, so ergibt sich, daß das Polynom W_{n+1} die in § 3 (mit m an Stelle von $n+1$) angegebene Eigenschaft hat. Ebenso muß sich in den für $a_1, \ldots, a_n$ gefundenen Determinantenquotienten ein gemeinsamer dem Körper der k-ten Einheitswurzeln angehöriger Faktor wegheben, so daß sich eine Darstellung mit rationalen Koeffizienten ergibt, die ich aber formelmäßig nicht allgemein angeben kann.

Wenn speziell $n+1<k$, also $\nu_\tau=\tau$ für $\tau=1, 2, \ldots, n+1$ ist, so folgt aus den Newtonschen Formeln

$$\begin{aligned}
&s_1 \quad + a_1 = 0,\\
&s_2 \quad + a_1 s_1 \quad + 2a_2 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&s_n \quad + a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \cdots + a_{n-1} s_1 + n\, a_n = 0,\\
&s_{n+1} + a_1 s_n \quad + a_2 s_{n-1} + \cdots + a_{n-1} s_2 + a_n s_1 = 0
\end{aligned}$$

durch Elimination der a_ν:

$$\begin{vmatrix} s_1 & 1 & & & \\ s_2 & s_1 & 2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ s_n & s_{n-1} & s_{n-2} & \cdots\ s_1 & n \\ s_{n+1} & s_n & s_{n-1} & \cdots\ s_2 & s_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.5}$$

Das ist also jetzt die offenbar irreduzible (weil in bezug auf s_{n+1} linear) Abhängigkeit zwischen $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$. Anderseits ist diese Abhängigkeit auch die folgende:

$$W_{n+1} = \begin{vmatrix} w_1 & 1-\varepsilon & & & \\ w_2 & w_1 & 1-\varepsilon^2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ w_n & w_{n-1} & w_{n-2} & \cdots\ 1-\varepsilon^n \\ w_{n+1} & w_n & w_{n-1} & \cdots\ w_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Daher kann sich W_{n+1} von der Determinante (4.5) nur um einen dem Körper der k-ten Einheitswurzeln angehörenden Zahlenfaktor unterscheiden, der sich ohne weiteres daraus ergibt, daß s_{n+1} in der Determinante (4.5) den Koeffizienten $(-1)^n \cdot n!$ und in W_{n+1} den Koeffizienten

$$(-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}(1-\varepsilon^{n+1}) \cdot \prod_{\lambda=1}^{n}(1-\varepsilon^\lambda)$$

[7]) Vgl. etwa mein Buch: Algebra, Bd. 1, Satz 60 (1. Aufl. S. 138, 2. und 3. Aufl. S. 134).

hat. Schreibt man m an Stelle von $n+1$, so erhält man die Formel (3.3), die sich wohl nicht leicht durch irgendwelche Umformungen der Determinanten gewinnen läßt.

§ 5. Das Gleichungssystem $x_1^{\nu_r} + \cdots + x_n^{\nu_r} = s_{\nu_r}$

I. Wir verstehen unter $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_n}$ jetzt n Unbestimmte über dem Körper $\mathfrak{k}$ der komplexen Zahlen und betrachten das Gleichungssystem

$$x_1^{\nu_r} + x_2^{\nu_r} + \cdots + x_n^{\nu_r} = s_{\nu_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.1}$$

Die Anzahl der Lösungen ist nach dem BÉZOUTschen Satz entweder gleich dem Produkt $\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \cdots \cdot \nu_n$ oder unendlich. Nun sind die symmetrischen Grundfunktionen $a_1, \ldots, a_n$ von $x_1, \ldots, x_n$ nach dem Bewiesenen durch die s_{ν_r} eindeutig bestimmt. Bezeichnet man dann die Wurzeln der Gleichung

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{5.2}$$

mit $\xi_1, \ldots, \xi_n$, so hat das System (5.1) offenbar die $n!$ Lösungen

$$x_1 = \xi_{\mu_1}, \quad x_2 = \xi_{\mu_2}, \ldots, x_n = \xi_{\mu_n},$$

wobei mit $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ die $n!$ Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ bezeichnet sind. Diese Lösungen sind *einfach*; denn die Funktionaldeterminante ist bis auf einen nicht verschwindenden Zahlenfaktor gleich

$$\begin{vmatrix} \xi_1^{\nu_1-1} & \xi_2^{\nu_1-1} & \cdots & \xi_n^{\nu_1-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_1^{\nu_n-1} & \xi_2^{\nu_n-1} & \cdots & \xi_n^{\nu_n-1} \end{vmatrix}, \tag{5.3}$$

also von Null verschieden, weil z. B. das Diagonalglied sich gegen kein anderes wegheb t[8]).

Beim BÉZOUTschen Satz müssen aber auch die Lösungen „im Unendlichen" mitgezählt werden, d. h. die Lösungen des homogenen Systems

$$x_1^{\nu_r} + x_2^{\nu_r} + \cdots + x_n^{\nu_r} = s_{\nu_r} x_0^{\nu_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

mit $x_0 = 0$, also die nicht trivialen Lösungen des Systems

$$x_1^{\nu_r} + x_2^{\nu_r} + \cdots + x_n^{\nu_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Dabei sind nun vier Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall: $n < k$. Hier ist $\nu_r = r$, also handelt es sich um das System

$$x_1^r + x_2^r + \cdots + x_n^r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Die NEWTONschen Formeln lehren jetzt, daß die symmetrischen Grundfunktionen von $x_1, \ldots, x_n$ sämtlich verschwinden. Man hat also nur die triviale Lösung $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, und somit keine Lösungen „im Unend-

[8]) Die $a_1, \ldots, a_n$ und ebenso die $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sind ja ebenfalls Unbestimmte über dem Körper $\mathfrak{k}$ der komplexen Zahlen. Von den drei Körpern $\mathfrak{R}(\mathfrak{k}, s_{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_n})$, $\mathfrak{R}(\mathfrak{k}, a_1, \ldots, a_n)$, $\mathfrak{R}(\mathfrak{k}, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ sind die ersten beiden dieselben und der dritte ist ein Oberkörper $(n!)$-ten Grades darüber.

lichen". In der Tat ist ja auch die Anzahl $n!$ der bereits angegebenen Lösungen jetzt gleich $\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \cdots \cdot \nu_n$, also gleich der Gesamtanzahl *aller* Lösungen.

Zweiter Fall: $k \leqq n < 2k-1$. Jetzt handelt es sich um das System

$$x_1^r + \cdots + x_n^r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, k-1,\ k+1, \ldots, n+1).$$

Die NEWTONschen Formeln lehren diesmal, daß die Gleichung mit den Wurzeln $x_1, \ldots, x_n$ diese ist:

$$t^n + 0 \cdot t^{n-1} + \cdots + 0 \cdot t^{n-k+1} + a_k \cdot t^{n-k} + 0 \cdot t^{n-k-1} + \cdots + 0 \cdot t + 0 = 0.$$

Man hat also, wenn $a_k = -\varrho^k$ gesetzt wird, die Lösung

$$x_1 = \varrho,\ x_2 = \varepsilon\varrho, \ldots, x_k = \varepsilon^{k-1}\varrho,$$
$$x_{k+1} = 0, \ldots, x_n = 0 \qquad (\text{falls } n > k)$$

mit willkürlichem ϱ und alle daraus durch Permutation hervorgehenden. Das sind $\binom{n}{k} \cdot (k-1)!$ verschiedene Lösungen[9]). Aus Symmetriegründen hat jede die gleiche Vielfachheit v und aus dem BÉZOUTschen Satz folgt dann

$$n! + v \cdot \binom{n}{k} \cdot (k-1)! = \nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \cdots \cdot \nu_n = \frac{(n+1)!}{k},$$

und hieraus

$$v = (n+1-k)!.$$

Dritter Fall: $n = 2k-1$. Jetzt handelt es sich um das System

$$x_1^r + \cdots + x_n^r = 0 \qquad (r = 1, \ldots, k-1,\ k+1, \ldots, 2k-1,\ 2k+1).$$

Die Gleichung mit den Wurzeln $x_1, \ldots, x_n$ ist wieder dieselbe wie im zweiten Fall, und auch die Lösungen sind dieselben; ihre Anzahl ist dementsprechend $\binom{2k-1}{k} \cdot (k-1)!$. Für ihre Vielfachheit v hat man aber diesmal

$$(2k-1)! + v \cdot \binom{2k-1}{k} \cdot (k-1)! = \nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \cdots \cdot \nu_n = \frac{(2k+1)!}{k \cdot 2k},$$

und daraus folgt

$$v = (k-1)!\,(k+1).$$

Vierter Fall: $n \geqq 2k$. Jetzt gibt es unendlich viele Lösungen, z.B.

$$x_1 = \varrho,\ x_2 = \varepsilon\varrho,\ \ldots,\ x_k = \varepsilon^{k-1}\varrho,$$
$$x_{k+1} = \sigma,\ x_{k+2} = \varepsilon\sigma,\ \ldots,\ x_{2k} = \varepsilon^{k-1}\sigma,$$
$$x_\nu = 0 \quad \text{für} \quad \nu > 2k$$

mit willkürlichem ϱ, σ.

II. Wenn die $s_{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_n}$ keine Unbestimmten, sondern irgendwie spezialisiert sind, so ändert sich an der angegebenen Anzahl und Vielfachheit der

[9]) Nicht etwa $\binom{n}{k} \cdot k!$, weil durch *zyklische* Vertauschung der nicht verschwindenden x_ν nur eine proportionale, also *dieselbe* Lösung entsteht.

Lösungen nichts, so lange die bei der Berechnung der a_ν auftretende Nennerdeterminante W_{n+1-k} von Null verschieden bleibt und auch die Determinante (5.3) nicht verschwindet. Wenn aber letztere verschwindet, also insbesondere, wenn die Gl. (5.2) mehrfache Wurzeln hat, ändern sich die Vielfachheiten. Wenn W_{n+1-k} verschwindet und es verschwinden nicht gleichzeitig alle n-reihigen Determinanten der Matrix, die zu dem aus (4.4) für $r=1, 2, \ldots, n$ entstehenden linearen Gleichungssystem für die a_ν gehört, so gibt es keine solchen a_ν. Das Gleichungssystem (5.1) hat also dann keine Lösung im Endlichen. Wenn aber alle diese Determinanten verschwinden, so gibt es unendlich viele Möglichkeiten für die a_ν, so daß unser System jetzt schon im Endlichen unendlich viele Lösungen hat.

Beispiel. $k=2$, $n=3$ (vgl. dazu den Schluß meiner zitierten Arbeit):

$$x_1+x_2+x_3=c,$$
$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=c^3,$$
$$x_1^5+x_2^5+x_3^5=s_5.$$

Für $s_5 \neq c^5$ gibt es keine zugehörigen a_ν, also keine Lösung im Endlichen. Wohl aber gibt es im Unendlichen, wie man leicht sieht, die Lösung

$$x_1=\varrho,\ x_2=-\varrho,\ x_3=0$$

und die durch Permutation daraus hervorgehenden, aber keine weiteren. Das sind drei verschiedene Lösungen, die aus Symmetriegründen die gleiche Vielfachheit v haben müssen; und zwar ist nach dem BÉZOUTschen Satz $3v=1\cdot 3\cdot 5$, also $v=5$. Ist aber $s_5=c^5$, so gibt es schon im Endlichen unendlich viele Lösungen, z.B.

$$x_1=c,\ x_2=\varrho,\ x_3=-\varrho$$

mit willkürlichem ϱ.

München 27, Friedrich-Herschel-Str. 11

(Eingegangen am 23. September 1955)

Weier, J.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 115—122 (1956)

Über Zerlegung eindimensionaler Nullstellengebilde

Von
Josef Weier

Sind V eine r-dimensionale offene Vollkugel in dem r-dimensionalen Euklidischen Raum R^r, $r>1$, und $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$ ganze Zahlen mit $\zeta = \sum \zeta_i$, ferner a ein Punkt in V und f eine stetige Abbildung von $\overline{V}$ in den R^r, a die einzige Nullstelle von f und der Index von a bei f gleich ζ, so gibt es eine stetige Abbildung f' von $\overline{V}$ in den R^r mit den Eigenschaften: für $p \in \overline{V} - V$ ist $f(p) = f'(p)$; die Abbildung f' hat nur endlich viele Nullstellen, und diese lassen sich derart mit $a_1, \ldots, a_m$ bezeichnen, daß für $i = 1, \ldots, m$ der Index von a_i bei f' gleich ζ_i ist. Diese Zerlegbarkeitseigenschaft von Nullstellen soll in der vorliegenden Arbeit folgenden allgemeineren Satz, die Zerlegung eindimensionaler singulärer Gebilde betreffend, liefern.

Es seien: P eine r-dimensionale endliche Euklidische Mannigfaltigkeit, $r>1$, in dem n-dimensionalen Euklidischen Raum R^n; weiter a^τ, $0 \leqq \tau \leqq 1$, von τ stetig abhängende Punkte aus P; und A die aus den Punkten (a^τ, τ) des R^{n+1} mit $0 < \tau < 1$ bestehende Menge; $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von P in sich; U eine A enthaltende offene Menge des R^{n+1}, so daß jeder Punkt (p, τ) aus U, für den $p = f^\tau(p)$ ist, in der Menge A liegt; ε eine positive Zahl; und $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$ ganze Zahlen mit $\zeta = \sum \zeta_i$; ferner der Punkt a^τ für $0 < \tau < 1$ Fixpunkt mit dem Index ζ von f^τ.

Hierauf gibt es für $i = 1, \ldots, m$ von τ stetig abhängende Punkte a_i^τ, $0 \leqq \tau \leqq 1$, aus P und eine Schar $(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von P in sich, über die gilt: für $i = 1, \ldots, m$ ist $a_i^0 = a^0$ und $a_i^1 = a^1$; für alle (i, τ) mit $i = 1, \ldots, m$ und $0 < \tau < 1$ liegt (a_i^τ, τ) in U; für $0 < \tau < 1$ sind die Punkte $a_1^\tau, \ldots, a_m^\tau$ paarweis verschieden; für $(p, \tau) \notin U$ ist $f^\tau(p) = g^\tau(p)$; für $(p, \tau) \in \overline{U}$ ist die Entfernung $\varrho\left(f^\tau(p), g^\tau(p)\right)$ der Punkte $f^\tau(p)$ und $g^\tau(p)$ kleiner als ε; ist (p, τ) ein Punkt aus U mit $p = g^\tau(p)$, so kommt (p, τ) unter den Punkten $(a_1^\tau, \tau), \ldots, (a_m^\tau, \tau)$ vor; für alle (i, τ) mit $i = 1, \ldots, m$ und $0 < \tau < 1$ ist der Punkt a_i^τ Fixpunkt von g^τ und der Index von a_i^τ bei g^τ gleich ζ_i.

Einige Bemerkungen in Abschnitt 1 dienen dem Zweck, eine in Abschnitt 3 bewiesene Verschärfung des vorstehenden Satzes vorzubereiten. Abschnitt 2 enthält einen Hilfssatz, der in Abschnitt 3 Anwendung findet.

1. Der Zylinder über einer Mannigfaltigkeit

Bedeutet $p = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ einen Punkt des R^n, $n>0$, und τ irgendeine Zahl, so bezeichnen wir den Punkt $(\tau_1, \ldots, \tau_n, \tau)$ des R^{n+1} auch mit (p, τ). Bis zum Schluß der Arbeit bezeichne P wie in der Einleitung eine r-dimensionale endliche Euklidische Mannigfaltigkeit, $r \geqq 1$, im R^n. Ist dann Q die

Menge der Punkte (p, τ) des R^{n+1} mit $p \in P$ und $0 \leq \tau \leq 1$, also der zu $[0, 1]$ gehörige Zylinder über P und F eine stetige Abbildung von Q in P, so heißt F eine Abbildungsschar. Mit $f^\tau(p) = F(p, \tau)$, $p \in P$, ist $F = (f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$.

Es sei A die Menge aller Punkte (p, τ) von Q mit $p = f^\tau(p)$. Wir wollen im folgenden annehmen, A sei ein endliches homogen eindimensionales Polyeder und für $0 \leq \tau \leq 1$ habe f^τ höchstens endlich viele Fixpunkte. Diese Annahme wird durch folgenden Satz, den ich an anderer Stelle beweisen werde, gerechtfertigt. Sind F_1 eine stetige Abbildung von Q in P und ε eine positive Zahl, so gibt es eine stetige Abbildung $F_2 = (f_2^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ von Q in P mit $\varrho(F_1, F_2) < \varepsilon$ und den Eigenschaften: die Menge aller Punkte (p, τ) von Q, in denen $p = F_2(p, \tau)$, ist entweder leer oder ein endliches homogen eindimensionales Polyeder; für $0 \leq \tau \leq 1$ hat f_2^τ höchstens endlich viele Fixpunkte.

Sind α_0, α_1 Zahlen mit $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 \leq 1$ und a^τ, $\alpha_0 \leq \tau \leq \alpha_1$, von τ stetig abhängende Punkte aus P, so wollen wir die Menge A_{01}, die sich aus den Punkten (a^τ, τ) des R^{n+1} mit $\alpha_0 < \tau < \alpha_1$ zusammensetzt, auch mit $(a^\tau, a_0 < \tau < \alpha_1)$ bezeichnen und sie eine eindimensionale „*Singularität*" von F nennen, wenn gilt: die Menge A_{01} ist in A gelegen und in A offen; sind β_0, β_1 Zahlen mit $0 \leq \beta_0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 \leq \beta_1 \leq 1$ und b^τ, $\beta_0 \leq \tau \leq \beta_1$, von τ stetig abhängende Punkte aus P, weiter B die Menge $(b^\tau, \beta_0 < \tau < \beta_1)$, schließlich $A_{01} \subset B \subset A$ und B in A offen, so ist $A_{01} = B$.

An anderer Stelle werde ich zeigen: sind $A_1, \ldots, A_m$ die Singularitäten von F, so ist $\sum \bar{A}_i = A$ und $A_j \cdot A_k = 0$ für $j \neq k$; es existiert eine ganze Zahl ζ, der „*Grad*" von A_{01}, derart, daß für $\alpha_0 < \tau < \alpha_1$ die Zahl ζ der Index von a^τ bei f^τ ist. Dann wird in Abschnitt 3 bewiesen, daß jede Singularität von F die in der Einleitung erklärte Zerlegungseigenschaft besitzt. Die Abbildungsschar F bezeichnen wir als „*endlich*". Eine offene Menge $\supset A_{01}$ des R^{n+1} heiße eine „*Umgebung*" von A_{01}.

2. Ein Hilfssatz

Sind V eine offene r-dimensionale Vollkugel im R^r, $r > 0$, und a^τ, $0 \leq \tau \leq 1$, von τ stetig abhängende Punkte von V, ferner $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{V}$ in den R^r, so bestätigt man leicht: wenn für $0 \leq \tau \leq 1$ der Punkt a^τ der einzige Fixpunkt von f^τ und ζ der Index von a^0 bei f^0, so ist für $0 \leq \tau \leq 1$ der Index von a^τ bei f^τ gleich ζ. Diese Bemerkung sei dem folgenden Hilfssatz voraufgeschickt.

Hilfssatz. *Es seien U, U' und V offene r-dimensionale Vollkugeln im R^r, $r > 1$, mit $\overline{U} \subset V$; f eine stetige Abbildung von $\overline{V}$ in den R^r mit nur endlich vielen Fixpunkten $q_1, \ldots, q_m$ und ζ_i für $i = 1, \ldots, m$ der Index von q_i bei f. Ferner sei $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{V}$ in den R^r mit den Eigenschaften: für $p \in \overline{V} - V$ ist $f^0(p) = f(p)$, in den (p, τ) mit $p \in \overline{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$ ist $p \neq f^\tau(p)$, für $p \in \overline{V} - U$ ist $p \neq f^1(p)$, es ist $f^1(\overline{U}) \subset U'$.*

Dann existieren Kurven $(q_i^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$, $i = 1, \ldots, m$, von Punkten q_i^τ aus V und eine Schar $(g^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von $\overline{V}$ in den R^r, so daß gilt: $g^0 = f$; in allen (p, τ) mit $p \in \overline{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$ ist $g^\tau(p) = f^\tau(p)$; für

$0 \leqq \tau \leqq 1$ *sind die Punkte* $q_1^\tau, \ldots, q_m^\tau$ *paarweis verschieden und die Fixpunkte von* g^τ; *für alle* (i, τ) *mit* $i = 1, \ldots, m$ *und* $0 \leqq \tau \leqq 1$ *ist* ζ_i *der Index von* q_i^τ *bei* g^τ; $g^1(p) = f^1(p)$ *für* $p \in \overline{V} - U$ *und* $g^1(\overline{U}) \subset U'$.

Beweis. Bedeutet W eine offene r-dimensionale Vollkugel mit $q_i \in W$, $i = 1, \ldots, m$, und $\overline{U} \subset W$ sowie $\overline{W} \subset V$, so gibt es zunächst, wie man leicht bestätigt, eine für alle (p, τ) mit $p \in \overline{W}$ und $0 \leqq \tau \leqq \frac{1}{2}$ erklärte stetige Abbildung F in den R^r und Kurven $(q_i^\tau, 0 \leqq \tau \leqq \frac{1}{2})$, $i = 1, \ldots, m$, von Punkten q_i^τ aus W mit den Eigenschaften: für $p \in \overline{W}$ ist $F(p, 0) = f(p)$; für $0 \leqq \tau \leqq \frac{1}{2}$ sind die Punkte $q_1^\tau, \ldots, q_m^\tau$ paarweis verschieden und die Fixpunkte von F^τ, falls F^τ die durch $F^\tau(p) = F(p, \tau)$, $p \in \overline{W}$, bestimmte Abbildung von $\overline{W}$ in den R^r bedeutet; der Index von q_i^τ bei F^τ ist ζ_i; die Punkte $q_1^{\frac{1}{2}}, \ldots, q_m^{\frac{1}{2}}$ liegen in U.

Es sei nun $g^0(p) = f(p)$ für $p \in \overline{V}$. In den (p, τ) mit $p \in \overline{W}$ und $0 < \tau \leqq \frac{1}{2}$ sei $g^\tau(p) = F(p, \tau)$. Es sei $g^\tau(p) = f^\tau(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{V} - V$ und $0 < \tau \leqq 1$ oder $p \in \overline{V} - U$ und $\tau = 1$.

Die Menge aller Punkte (p, τ), für die entweder $p \in \overline{V} - W$ und $0 \leqq \tau \leqq \frac{1}{2}$ oder $p \in \overline{V} - U$ und $\frac{1}{2} \leqq \tau \leqq 1$ ist, werde mit B bezeichnet; mit A die Menge aller (p, τ), in denen der Punkt $g^\tau(p)$ bereits erklärt ist. Dann existiert, wie man leicht bestätigt, eine stetige Abbildung w von B auf $A \cdot B$ derart, daß $w(p, \tau) = (p, \tau)$ für alle Punkte (p, τ) aus $A \cdot B$. Und es ist $p_1 \neq g^{\tau_1}(p_1)$ in allen Punkten (p, τ) aus B, falls (p_1, τ_1) den Punkt $w(p, \tau)$ bedeutet.

Setzen wir $g^\tau(p) = p + \left(g^{\tau_1}(p_1) - p_1\right)$ in den Punkten (p, τ) aus B, wobei wieder (p_1, τ_1) den Punkt $w(p, \tau)$ bezeichnet, so ist $p \neq g^\tau(p)$ in allen (p, τ) aus B. Verbleibt, $g^\tau(p)$ auf der Menge C aller (p, τ) mit $p \in U$ und $\frac{1}{2} < \tau \leqq 1$ zu definieren.

Zunächst gibt es eine stetige Abbildung G von $\overline{C}$ in den R^r mit den Eigenschaften: für alle Punkte (p, τ) aus $(A + B) \cdot \overline{C}$ ist $G(p, \tau) = g^\tau(p)$; bedeutet G^τ für $\frac{1}{2} \leqq \tau \leqq 1$ die durch $G^\tau(p) = G(p, \tau)$, $p \in \overline{U}$, bestimmte Abbildung von $\overline{U}$ in den R^r, so sind die Punkte $q_1^{\frac{1}{2}}, \ldots, q_m^{\frac{1}{2}}$ die Fixpunkte von G^τ.

Wegen $G(p, 1) \in U'$, $p \in \overline{U} - U$, gibt es eine stetige Abbildung λ von $\overline{U}$ in $(0, 1]$, über die gilt: für $p \in \overline{U} - U$ ist $\lambda(p) = 1$, für $p \in U$ ist

$$(*) \qquad p + \lambda(p)\left(G(p, 1) - p\right) \in U'.$$

Somit existiert weiter eine stetige Abbildung μ von $\overline{C}$ in $(0, 1]$ mit den Eigenschaften: für $p \in \overline{U}$ ist $\mu(p, 1) = \lambda(p)$, für $(p, \tau) \in (A + B) \cdot \overline{C}$ ist $\mu(p, \tau) = 1$. Mit

$$g^\tau(p) = p + \mu(p, \tau)\left(G(p, \tau) - p\right),$$

$(p, \tau) \in \overline{C}$, ist dann $g^1(p) = p + \lambda(p)\left(G(p, 1) - p\right)$ für $p \in \overline{U}$, nach (*) also $g^1(\overline{U}) \subset U'$. Wegen $\mu(p, \tau) > 0$, $(p, \tau) \in \overline{C}$, sind für $\frac{1}{2} \leqq \tau \leqq 1$ die Punkte $q_1^{\frac{1}{2}}, \ldots, q_m^{\frac{1}{2}}$ die Fixpunkte von g^τ auf U. Setzen wir daher noch $q_i^\tau = q_i^{\frac{1}{2}}$ in allen (i, τ) mit $i = 1, \ldots, m$ und $\frac{1}{2} < \tau \leqq 1$, so ist der Hilfssatz bewiesen.

3. Zerlegung von Singularitäten

Sind F eine endliche Abbildungsschar in P und A eine Singularität von F, so existiert, wie man sich leicht überlegt, eine offene Menge U im R^{n+1} derart, daß $A \subset U$ und $B \cdot \overline{U} = 0$ für jede Singularität $B \neq A$ von F. Ist

$A=(a^\tau, \alpha_0<\tau<\alpha_1)$, so gibt es weiter zu jeder Zahl τ aus dem Intervall (α_0, α_1) eine offene Menge U_0^τ im R^n und eine positive Zahl ε^τ derart, daß mit $U^\tau = P \cdot U_0^\tau$ gilt: die Menge aller Punkte (p, σ), für die $p \in U_0^\tau$ und $|\sigma-\tau|<\varepsilon^\tau$ ist, liegt in U; für alle Zahlen σ aus (α_0, α_1) mit $|\sigma-\tau|<\varepsilon^\tau$ ist der Punkt a^σ in U^τ gelegen und der einzige Fixpunkt von f^σ auf $\overline{U}^\tau$. Dann wollen wir zeigen:

Zerlegungssatz. *Es seien F eine endliche Abbildungsschar in P; A eine Singularität von F und U eine Umgebung von A derart, daß jede Singularität $\neq A$ von F zu $\overline{U}$ fremd ist; ferner ζ der Grad von A bei F und $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ ganze Zahlen mit $\zeta=\sum \zeta_i$; und ε eine positive Zahl. Dann gibt es eine endliche Abbildungsschar F' in P mit den folgenden Eigenschaften* I *bis* III.

I. *Für alle $(p, \tau) \notin U$ ist $F(p, \tau)=F'(p, \tau)$. Die Entfernung $\varrho(F, F')$ ist $<\varepsilon$.*

II. *Jede Singularität von F' ist entweder zu $\overline{U}$ fremd oder in U gelegen.*

III. *Die in U liegenden Singularitäten von F' lassen sich derart mit $A_i=(a_i^\tau, \alpha_{i0}<\tau<\alpha_{i1})$, $i=1, \ldots, m$, bezeichnen, daß, wenn $A=(a^\tau, \alpha_0<\tau<\alpha_1)$, gilt: für $i=1, \ldots, m$ ist $\alpha_{i0}=\alpha_0$ und $\alpha_{i1}=\alpha_1$; für τ gegen α_k ist $\lim a_i^\tau = \lim a^\tau$, wobei $i=1, \ldots, m$ und $k=0, 1$; für $i=1, \ldots, m$ ist der Grad von A_i bei F' gleich ζ_i.*

Beweis. Ist M eine Menge in einem Euklidischen Raum, so bezeichne $\Delta(M)$ ihren Durchmesser. Dann seien $F=(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$, α eine Zahl aus (α_0, α_1) und S, T in P offene Mengen mit den Eigenschaften: die Menge aller (p, α) mit $p \in \overline{S}$ liegt in U; der Durchmesser $\Delta(T)$ von T ist $<\varepsilon$; es ist $a^\alpha \in S$ der einzige Fixpunkt von f^α auf $\overline{S}$ und $\overline{S}+f^\alpha(\overline{S})<T$; es existiert eine topologische Abbildung t von T auf den R^r, die S in eine offene r-dimensionale Vollkugel des R^r überführt.

Dann gibt es, wie schon in der Einleitung bemerkt, eine stetige Abbildung f von $\overline{S}$ in T mit $f(p)=f^\alpha(p)$, $p \in \overline{S}-S$, und der Eigenschaft: man kann die Fixpunkte von f auf S derart $a_1, \ldots, a_m$ nennen, daß für $i=1, \ldots, m$ der Index von a_i bei f gleich ζ_i ist.

Weiter existieren, einer einfachen Überlegung zufolge, in P offene Mengen Y_i, Z_i sowie Zahlen γ_i, $i=0, 1, \ldots$, mit $S=Y_0$, $T=Z_0$,

$$(1) \qquad \Delta(Z_i)<\varepsilon, \quad \lim \Delta(Z_i)=0, \quad \alpha=\gamma_0<\gamma_1<\gamma_2<\cdots, \quad \lim \gamma_i=\alpha_1$$

und den weiteren Eigenschaften: die Menge aller (p, τ) mit $p \in \overline{Y}_i$ und $\gamma_i \leqq \tau \leqq \gamma_{i+1}$ liegt in U; für $\gamma_i \leqq \tau \leqq \gamma_{i+1}$ ist $a^\tau \in Y_i$ der einzige Fixpunkt der Abbildung f^τ auf $\overline{Y}_i$ und

$$(2) \qquad \overline{Y}_i + f^\tau(\overline{Y}_i) < Z_i;$$

es existiert eine topologische Abbildung t_i von Z_i auf den R^r, die Y_i in eine offene r-dimensionale Vollkugel des R^r überführt.

Es sei j eine der Zahlen $0, 1, \ldots$; ferner h eine stetige Abbildung von $\overline{Y}_j$ in Z_j mit

$$(3) \qquad h(p)=f^{\gamma_j}(p), \qquad p \in \overline{Y}_j - Y_j,$$

und der Eigenschaft: man kann die Fixpunkte von h derart mit $q_1, \ldots, q_m$ bezeichnen, daß für $i = 1, \ldots, m$ der Index von q_i bei h gleich ζ_i ist.

Für $\gamma_j \leq \tau \leq \gamma_{j+1}$ sei $f^\tau_{j0} = f^\tau | \overline{Y}_j$. Dann ist

$$p \neq f^\tau_{j0}(p) \tag{4}$$

in allen (p, τ) mit $p \in \overline{Y}_j - Y_j$ und $\gamma_j \leq \tau \leq \gamma_{j+1}$.

Die Mengen X_j und X_j' bestimmen wir wie folgt. Da der Punkt $a^{\gamma_{j+1}}$ in $Y_j \cdot Y_{j+1}$ liegt und Fixpunkt der Abbildung $f^{\gamma_{j+1}}$ ist, existieren Teilmengen X_j und X_j' von $Y_j \cdot Y_{j+1}$ mit den Eigenschaften: $t_j(X_j)$ und $t_j(X_j')$ sind offene r-dimensionale Vollkugeln im R^r, ferner ist $a^{\gamma_{j+1}} \in X_j \subset X_j'$ und

$$p \neq f^{\gamma_{j+1}}(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{Y}_j - X_j, \quad f^{\gamma_{j+1}}(\overline{X}_j) \subset X_j'. \tag{5}$$

Hierauf gibt es wegen (3), (4), (5) und dem obigen Hilfssatz eine Schar $(h^\tau, \gamma_j \leq \tau \leq \gamma_{j+1})$ stetiger Abbildungen h^τ von $\overline{Y}_j$ in Z_j sowie Kurven $(q_i^\tau, \gamma_j \leq \tau \leq \gamma_{j+1})$, $i = 1, \ldots, m$, von Punkten q_i^τ aus Y_j mit den Eigenschaften I_j und II_j.

I_j. Es ist $h^{\gamma_j} = h$. In allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{Y}_j - Y_j$ und $\gamma_j \leq \tau \leq \gamma_{j+1}$ oder $p \in \overline{Y}_j - X_j$ und $\tau = \gamma_{j+1}$ ist $h^\tau(p) = f^\tau(p)$; $h^{\gamma_{j+1}}(\overline{X}_j)$ liegt in X_j'.

II_j. Für $\gamma_j \leq \tau \leq \gamma_{j+1}$ sind die Punkte $q_1^\tau, \ldots, q_m^\tau$ paarweis verschieden und die Fixpunkte von h^τ, ihre Indexe beziehungsweise $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$.

Aus $h^\tau(\overline{Y}_j) + f^\tau(\overline{Y}_j) \subset Z_j$, $\gamma_j \leq \tau \leq \gamma_{j+1}$, folgt:

III_j. Es ist $\varrho(h^\tau(p), f^\tau(p)) < \Delta(Z_j)$ in allen (p, τ) mit $p \in \overline{Y}_j$ und $\gamma_j \leq \tau \leq \gamma_{j+1}$.

Bezeichnet h' die durch $h'(p) = f^{\gamma_{j+1}}(p)$, $p \in \overline{Y}_{j+1} - X_j$, und $h'(p) = h^{\gamma_{j+1}}(p)$, $p \in \overline{X}_j$, bestimmte Abbildung von $\overline{Y}_{j+1}$ in P, so gilt, wie wir zeigen wollen:

IV_j. Die Abbildung h' ist stetig. Es liegt $h'(\overline{Y}_{j+1})$ in Z_{j+1}. Die Punkte $q_i^{\gamma_{j+1}}$, $i = 1, \ldots, m$, sind die Fixpunkte von h'; die Indexe dieser Fixpunkte sind bzw. gleich $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$.

Beweis von IV_j. Zum Nachweis der Stetigkeit von h' genügt es zu zeigen, daß $f^{\gamma_{j+1}}(p) = h^{\gamma_{j+1}}(p)$ für $p \in \overline{X}_j - X_j$. Das folgt aber aus I_j und $X_j \subset Y_j$. — Es ist $h'(\overline{Y}_{j+1}) = h'(\overline{Y}_{j+1} - X_j) + h'(X_j) \subset f^{\gamma_{j+1}}(\overline{Y}_{j+1}) + h^{\gamma_{j+1}}(X_j)$, wegen (2) und I_j also $h'(\overline{Y}_{j+1}) \subset Z_{j+1} + X_j'$, wegen $X_j' \subset Y_{j+1} \subset Z_{j+1}$ daher $h'(\overline{Y}_{j+1}) \subset Z_{j+1}$, wie behauptet. — Da $a^{\gamma_{j+1}}$ in X_j liegt, h' auf $\overline{Y}_{j+1} - X_j$ mit $f^{\gamma_{j+1}}$ übereinstimmt und $a^{\gamma_{j+1}}$ der einzige Fixpunkt von $f^{\gamma_{j+1}}$ auf $\overline{Y}_{j+1}$ ist, hat h' auf $\overline{Y}_{j+1} - X_j$ keinen Fixpunkt. Auf X_j stimmen h' und $h^{\gamma_{j+1}}$ überein. Daher folgt der dritte Teil von IV_j aus $X_j \subset Y_j$ sowie $h^{\gamma_{j+1}}(p) = f^{\gamma_{j+1}}(p) \neq p$, $p \in \overline{Y}_j - X_j$, und II_j.

Aus I_j bis IV_j und der Erklärung von f, Y_i, Z_i, γ_i ergibt sich nun leicht folgendes.

Es existieren in P offene Mengen X_i, $i = 0, 1, \ldots$, mit $X_i \subset Y_i \cdot Y_{i+1}$ und Kurven $(c_k^\tau, \alpha \leq \tau < \alpha_1)$, $k = 1, \ldots, m$, von Punkten c_k^τ aus P sowie für

$i=0, 1, \ldots$ eine Schar $(h_i^\tau,\ \gamma_i \leqq \tau \leqq \gamma_{i+1})$ stetiger Abbildungen h_i^τ von $\overline{Y}_i$ in Z_i mit I_{1i} bis IV_{1i} und den weiteren Eigenschaften:

$$c_k^\tau \in Y_i \tag{6}$$

in allen (i, k, τ) mit $i=0, 1, \ldots, k=1, \ldots, m$ und $\gamma_i \leqq \tau \leqq \gamma_{i+1}$; es ist $c_k^\alpha = a_k$ für $k=1, \ldots, m$ und $h_0^\alpha = f$.

I_{1i}. In allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{Y}_i - Y_i$ und $\gamma_i \leqq \tau \leqq \gamma_{i+1}$ oder $p \in \overline{Y}_i - X_i$ und $\tau = \gamma_{i+1}$, ist $h_i^\tau(p) = f^\tau(p)$.

II_{1i}. Für $\gamma_i \leqq \tau \leqq \gamma_{i+1}$ sind die Punkte $c_1^\tau, \ldots, c_m^\tau$ paarweis verschieden und die Fixpunkte von h_i^τ; ihre Indexe bei h_i^τ sind bzw. $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$.

III_{1i}. Es ist $\varrho\left(h_i^\tau(p), f^\tau(p)\right) < \Delta(Z_i)$ in allen (p, τ) mit $p \in \overline{Y}_i$ und $\gamma_i \leqq \tau \leqq \gamma_{i+1}$.

IV_{1i}. Es ist $h_{i+1}^{\gamma_{i+1}}(p) = f^{\gamma_{i+1}}(p)$ für $p \in \overline{Y}_{i+1} - X_i$ und $h_{i+1}^{\gamma_{i+1}}(p) = h_i^{\gamma_{i+1}}(p)$ für $p \in \overline{X}_i$.

Eine bezüglich α_0 angestellte Überlegung, die fast wörtlich wie die oben bezüglich α_1 durchgeführte verläuft, zeigt folgendes.

Es gibt in P offene Mengen U_i, V_i, W_i sowie Zahlen β_i, $i=0, 1, \ldots$, mit $S=V_0$, $T=W_0$, $U_i \subset V_i \cdot V_{i+1}$,

$$\Delta(W_i) < \varepsilon, \quad \lim \Delta(W_i) = 0, \quad \cdots < \beta_2 < \beta_1 < \beta_0 = \alpha, \quad \lim \beta_i = \alpha_0 \tag{1'}$$

und den weiteren Eigenschaften: die Menge aller (p, τ) mit $p \in \overline{V}_i$ und $\beta_{i+1} \leqq \tau \leqq \beta_i$ liegt in U; für $\beta_{i+1} \leqq \tau \leqq \beta_i$ ist $a^\tau \in V_i$ der einzige Fixpunkt f^τ auf $\overline{V}_i$ und

$$\overline{V}_i + f^\tau(\overline{V}_i) \subset W_i. \tag{2'}$$

Ferner gibt es Kurven $(b_k^\tau, \alpha_0 < \tau \leqq \alpha)$, $k=1, \ldots, m$, von Punkten b_k^τ aus P sowie für $i=0, 1, \ldots$ eine Schar $(g_i^\tau,\ \beta_{i+1} \leqq \tau \leqq \beta_i)$ stetiger Abbildungen g_i^τ von $\overline{V}_i$ in W_i mit I_{0i} bis IV_{0i} und den weiteren Eigenschaften:

$$b_k^\tau \in V_i \tag{6'}$$

in allen (i, k, τ) mit $i=0, 1, \ldots, k=1, \ldots, m$ und $\beta_{i+1} \leqq \tau \leqq \beta_i$; es ist $b_k^\alpha = a_k$ für $k=1, \ldots, m$ und $g_0^\alpha = f$.

I_{0i}. In allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{V}_i - V_i$ und $\beta_{i+1} \leqq \tau \leqq \beta_i$ oder $p \in \overline{V}_i - U_i$ und $\tau = \beta_{i+1}$, ist $g_i^\tau(p) = f^\tau(p)$.

II_{0i}. Für $\beta_{i+1} \leqq \tau \leqq \beta_i$ sind die Punkte $b_1^\tau, \ldots, b_m^\tau$ paarweis verschieden und die Fixpunkte von g_i^τ, ihre Indexe beziehungsweise $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$.

III_{0i}. Es ist $\varrho\left(g_i^\tau(p), f^\tau(p)\right) < \Delta(W_i)$ in allen (p, τ) mit $p \in \overline{V}_i$ und $\beta_{i+1} \leqq \tau \leqq \beta_i$.

IV_{0i}. Es ist $g_{i+1}^{\beta_{i+1}}(p) = f^{\beta_{i+1}}(p)$ für $p \in \overline{V}_{i+1} - U_i$ und $g_{i+1}^{\beta_{i+1}}(p) = g_i^{\beta_{i+1}}(p)$ für $p \in \overline{U}_i$.

Sei nun τ eine Zahl aus $[0, 1]$. Ist *erstens* τ zu (α_0, α_1) fremd, so bezeichne f_1^τ die Abbildung f^τ. *Zweitens* liege τ in $(\alpha_0, \alpha]$. Dann existiert insonderheit eine Zahl i mit in $(\beta_{i+1}, \beta_i]$ gelegenem τ. Hier sei f_1^τ die durch $f_1^\tau | \overline{V}_i = g_i^\tau$

und $f_1^\tau|(P-V_i)=f^\tau|(P-V_i)$ bestimmte Abbildung. *Drittens* liege τ in (α,α_1). Dann gibt es im besonderen eine Zahl k, so daß τ in $[\gamma_k,\gamma_{k+1})$ liegt. Hier sei $f_1^\tau|\overline{Y}_k=h_k^\tau$ und $f_1^\tau|(P-Y_k)=f^\tau|(P-Y_k)$. In allen (p,τ) mit $p\in P$ und $0\leqq\tau\leqq 1$ nennen wir den Punkt $f_1^\tau(p)$ auch $F'(p,\tau)$. Dann ist F' eine eindeutige Abbildung.

Zum Beweis, daß die Abbildung F' stetig, bedeute c einen Punkt aus P und γ eine Zahl aus $[0,1]$. *Erstens* möge γ zu $[\alpha_0,\alpha_1]$ fremd sein. Dann folgt die Stetigkeit von F' in (c,γ) aus derjenigen von F in (c,γ). Liegt *zweitens* γ in einem (γ_i,γ_{i+1}), so folgt die Stetigkeit von F' in (c,γ) leicht aus I_{1i}. *Drittens* sei j eine der Zahlen $0,1,\ldots$ und $\gamma=\gamma_{j+1}$. Für $\gamma_j\leqq\tau\leqq\gamma_{j+1}$ bedeute dann h_-^τ die durch

$$h_-^\tau|\overline{Y}_j=h_j^\tau \quad\text{und}\quad h_-^\tau|(P-Y_j)=f^\tau|(P-Y_j) \tag{7}$$

bestimmte Abbildung von P in sich, ferner h_+^τ für $\gamma_{i+1}\leqq\tau\leqq\gamma_{i+2}$ die durch

$$h_+^\tau|\overline{Y}_{j+1}=h_{j+1}^\tau \quad\text{und}\quad h_+^\tau|(P-Y_{j+1})=f^\tau|(P-Y_{j+1}) \tag{8}$$

bestimmte Abbildung von P in sich. Zum Beweis, daß F' in (c,γ) stetig ist, genügt es zu zeigen, daß $f_1^\tau=h_-^\tau$ für $\gamma_j<\tau\leqq\gamma_{j+1}$, $f_1^\tau=h_+^\tau$ für $\gamma_{j+1}<\tau<\gamma_{j+2}$ und $h_-^\tau=h_+^\tau$ für $\tau=\gamma_{j+1}$. Wegen der Erklärung von f_1^τ, h_-^τ, h_+^τ verbleibt daher nur der Nachweis, daß $h_-^\tau=h_+^\tau$ für $\tau=\gamma_{j+1}$. Auf $P-(Y_j+Y_{j+1})$ stimmen Abbildungen $h_-^{\gamma_{j+1}}$ und $h_+^{\gamma_{j+1}}$ überein. Nun sei p ein Punkt aus $(Y_j+Y_{j+1})-X_j$; dann ist $h_-^{\gamma_{j+1}}(p)=f^{\gamma_{j+1}}(p)$ wegen I_{1j} und $h_+^{\gamma_{j+1}}(p)=f^{\gamma_{j+1}}(p)$ wegen IV_{1j}. Für $p\in X_j$ ist $h_-^{\gamma_{j+1}}(p)=h_+^{\gamma_{j+1}}(p)$ wegen IV_{1j}.

Ist *viertens* c von dem Punkt $\lim a^\tau$, τ gegen α_1, verschieden und $\gamma=\alpha_1$, so gibt es eine Umgebung von (c,γ) derart, daß für jeden Punkt (p,τ) dieser Umgebung $F'(p,\tau)=F(p,\tau)$ ist.

Es sei *fünftens* $c=\lim a^\tau$, τ gegen α_1, und $\gamma=\alpha_1$. Dann ist $f_1^\gamma=f^\gamma$, wegen $c=f^\gamma(c)$ also $F'(c,\gamma)=c$. Zum Beweis, daß F' in (c,γ) stetig ist, genügt also, wenn δ eine positive Zahl bezeichnet, der Nachweis der Existenz einer positiven Zahl δ_1 derart, daß

$$\varrho\big(c,F'(p,\tau)\big)<\delta \tag{9}$$

für alle (p,τ) mit $\varrho\big((c,\gamma),(p,\tau)\big)<\delta_1$. Die Existenz einer solchen Zahl ergibt sich wie folgt. Da F stetig, existiert eine positive Zahl δ_0 der Eigenschaft, daß $\varrho\big(c,F(p,\tau)\big)<\delta/2$ in allen (p,τ) mit $\varrho\big((c,\gamma),(p,\tau)\big)<\delta_0$. Wegen $\lim\Delta(Z_i)=0$ gibt es eine natürliche Zahl j, so daß $\Delta(Z_i)<\delta/2$ für alle $i>j$. Hierauf seien δ_1 eine Zahl mit $0<\delta_1<\delta_0$, so daß $|\alpha_1-\tau|<\alpha_1-\gamma_j$ für alle (p,τ) mit $\varrho\big((c,\gamma),(p,\tau)\big)<\delta_1$; und (b,β) ein Punkt (p,τ) der letzteren Art. Dann ist

$$\varrho\big(c,F(b,\beta)\big)<\delta/2, \tag{10}$$

im Falle $F'(b,\beta)=F(b,\beta)$ also (9) richtig. Ist $F'(b,\beta)\neq F(b,\beta)$, so gibt es eine natürliche Zahl $l\geqq j$ derart, daß $\beta\in[\gamma_l,\gamma_{l+1})$ und $b\in Y_l$ sowie $F'(b,\beta)=h_l^\beta(b)$. Nach III_{1l} ist $\varrho\big(h_l^\beta(b),F(b,\beta)\big)<\Delta(Z_l)<\delta/2$, daher (9) gleichfalls richtig. Alle Fälle, die von den bisher aufgezählten verschieden sind, erledigen sich wie diese. Damit ist die Stetigkeit von F' nachgewiesen.

Wenn $(\mathfrak{p}, \tau)$ ein Punkt $\notin U$, so befindet sich unter den Zahlen $i = 0, 1, \ldots$ keine derart, daß entweder $\mathfrak{p} \in \overline{V}_i$ und $\beta_{i+1} \leqq \tau \leqq \beta_i$ oder $\mathfrak{p} \in \overline{Y}_i$ und $\gamma_i \leqq \tau \leqq \gamma_{i+1}$. Mithin ist $F'(\mathfrak{p}, \tau) = F(\mathfrak{p}, \tau)$ für $(\mathfrak{p}, \tau) \notin U$. Aus $\Delta(W_i) < \varepsilon$ und $\Delta(Z_i) < \varepsilon$, $i = 0, 1, \ldots$, folgt leicht, daß $\varrho(F, F') < \varepsilon$. Die übrigen von F' verlangten Eigenschaften ergeben sich unmittelbar aus der Erklärung von F'.

Zum Zerlegungssatz, der damit bewiesen ist, sei noch folgendes bemerkt. — Die Voraussetzung, P stelle eine endliche Euklidische Mannigfaltigkeit eine Dimension > 1 dar, läßt sich durch die schwächere ersetzen, es sei P ein endliches Euklidisches Polyeder, das in jedem seiner Punkte lokal eindimensional zusammenhängt. — Der Zerlegungssatz gestattet eine Umkehrung: *Es seien* $A_i = (a_i^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$, $i = 1, \ldots, m$, *Singularitäten der endlichen Abbildungsschar* F *derart, daß* $\lim a_i^\tau = \lim a_1^\tau$ *für* τ *gegen* α_k $(i = 2, \ldots, m, k = 0, 1)$ *ist; und* U *eine Umgebung von* $\sum A_i$ *so beschaffen, daß jede Singularität* $\neq A_1, \ldots, A_m$ *von* F *zu* $\overline{U}$ *fremd ist; ferner* $\varrho(\mathfrak{p}, F(\mathfrak{p}, \tau))$ *in allen Punkten* $(\mathfrak{p}, \tau)$ *aus* $\overline{U}$ *hinreichend klein. Dann kann man die* A_i *auf eine Singularität zusammenziehen.* Näherhin existiert eine endliche Abbildungsschar G mit den Eigenschaften: für alle $(\mathfrak{p}, \tau) \notin U$ ist $G(\mathfrak{p}, \tau) = F(\mathfrak{p}, \tau)$; jede Singularität von G ist entweder zu $\overline{U}$ fremd oder in U gelegen; in U liegt genau eine Singularität von G, und diese kann man derart mit $A = (a^\tau, \beta_0 < \tau < \beta_1)$ bezeichnen, daß $\alpha_0 = \beta_0$ und $\alpha_1 = \beta_1$ sowie $\lim a^\tau = \lim a_1^\tau$, τ gegen α_0 und α_1. — Natürlich gilt der Zerlegungssatz mit Umkehrung auch, wenn die eindimensionale Singularität statt von einer einzelnen Abbildung durch ein Abbildungspaar bestimmt wird.

Fulda, Marienstr. 9

(Eingegangen am 17. Dezember 1954)

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.

Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F.K. Schmidt, B. L. van der Waerden.

LXXVII. Band: **Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.**

Von Dr. **Heinrich Behnke,** Professor der Mathematik an der Universität Münster in Westf., und Dr. **Friedrich Sommer,** Dozent der Mathematik an der Universität Münster in Westf. Mit 59 Abbildungen. X, 582 Seiten Gr.-8°. 1955.

DM 66,—; Ganzleinen DM 69,60

Das Buch soll einen einheitlichen, rein komplexen Aufbau der Funktionentheorie von ihren Anfängen, den Mengen und Folgen komplexer Zahlen, bis zur Funktionentheorie auf Riemannschen Flächen geben. Auf kompakten Riemannschen Flächen werden noch unter Zuhilfenahme der Untersuchungen von O. Teichmüller die Abelschen Integrale allein mittels des großen Uniformierungssatzes (und nicht wie sonst etwa üblich mittels der reellen Dirichletschen Integrale) aufgebaut. Für nicht kompakte Riemannsche Flächen schließen die Untersuchungen mit dem allgemeinen Approximationssatz (der Verallgemeinerung des Rungeschen Satzes) und der Konstruktion von überall holomorphen Funktionen.

Das Buch beruht auf den seit vielen Jahren angefertigten Nachschriften zu den Vorlesungen der Verfasser. So ist zunächst als Leser an den Studenten gedacht, der, mit welchem Ziel auch immer, sich einer mehrsemestrigen Ausbildung in der Funktionentheorie unterziehen will. Doch ist das Buch auch für den Leser geschrieben, der es nach einem abgeschlossenen Studium zur Hand nimmt, um es wegen einer speziellen Frage zu konsultieren, und sich nicht der Mühe unterziehen kann, es von Anfang an zu lesen.

LXXVIII. Band: **Einführung in die operative Logik und Mathematik.**

Von Dr. **Paul Lorenzen,** apl. Professor der Mathematik an der Universität Bonn. Mit 1 Textabbildung. VII, 298 Seiten Gr.-8°. 1955.

DM 38,40; Ganzleinen DM 42,—

Inhaltsübersicht: Erklärung der wichtigsten Bezeichnungen. — Einleitung. — **Logik.** Protologik: Schematisches Operieren. Ableitbarkeit und Zulässigkeit. Eliminationsverfahren. Induktion und Inversion. Unableitbarkeit und Gleichheit. Logische Partikeln: Konsequenzlogik. Konjunktion und Disjunktion. Negation. Erweiterungen der Logik: Gleichheit und Kennzeichnungen. Abstraktion, Relationen und Funktionen. Modalität und Wahrscheinlichkeit. — **Konkrete Mathematik.** Arithmetik: Systeme und endliche Mengen. Grundzahlen. Länge und Kardinalzahl. Rationale und algebraische Zahlen. Sprachkonstruktionen: Die elementare Sprache. Sprachschichten. Analysis: Reelle Zahlen. Mengen und Abbildungen. Erweiterungen der Analysis. — **Abstrakte Mathematik.** Allgemeine Strukturtheorie: Gebilde und Strukturen. Elementare und nichtelementare Strukturen. Spezielle Strukturen: Algebra. Topologie. — Literaturverzeichnis. — Bezeichnungen. — Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Soeben erschien:

Acht- und neunstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen. Dargestellt mittels des Jacobischen Parameters q.

Eight and Nine Place Tables of Elliptical Functions.

Based on Jacobi's Parameter q.

Von Dr.-Ing. **M. Schuler**, Professor emeritus an der Universität Göttingen, und Dr. phil. habil. **H. Gebelein**, Dozent, Bamberg. Mit einem englischen Text von Lauritz S. Larsen, B. S. Mit 11 Abbildungen. XXIV, 296 Seiten 4^0. 1955.

Ganzleinen DM 58,—

Inhaltsverzeichnis (deutsch und englisch): Vorwort. Inhaltsverzeichnis. Einführung. Tabelle I: Funktionen $G(q^4, z)$ laufend nach z (mit Angabe der zugehörigen Werte q und Θ). Tabelle II: Funktionen $G(q^4, z)$ laufend nach q^4. Zugehörige Werte q und Θ zusammengestellt. Tabelle III: Funktionen $H(q^3, z)$ laufend nach z (mit Angabe der zugehörigen Werte q und Θ). Tabelle IV: Funktionen $H(q^3, z)$ laufend nach q^3. Zugehörige Werte q und Θ zusammengestellt. Tabelle V: JACOBIsche elliptische Funktionen laufend nach z (mit Angabe der zugehörigen Werte für Θ, $-\lg\cos\Theta = -\lg k'$, K und K/E). Tabelle VI: JACOBIsche elliptische Funktionen laufend nach q. Zugehörige Werte für $-\lg k'$ und Θ. Zugehörige Werte für K und K/E. Tabelle VII: Tafeln für die Umrechnung zwischen dem LEGENDREschen Modul Θ und dem JACOBIschen Parameter q.

Fünfstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen. Dargestellt mittels des Jacobischen Parameters q.

Five Place Tables of Elliptical Functions.

Based on Jacobi's Parameter q.

Von Dr.-Ing. **M. Schuler**, Professor emeritus an der Universität Göttingen, und Dr. phil. habil. **H. Gebelein**, Dozent, Bamberg. Mit einem englischen Text von Lauritz S. Larsen, B. S. Mit 11 Abbildungen. XII, 114 Seiten Gr.-8^0. 1955.

Ganzleinen DM 29,60

Inhaltsübersicht (deutsch und englisch): Vorwort. Inhaltsverzeichnis. Einführung. Tabelle I: JACOBIsche elliptische Funktionen laufend nach z mit Angabe der zugehörigen Werte Θ. Tabelle II: JACOBIsche elliptische Funktionen laufend nach q. Beigefügt: Werte für Θ und $-\lg\cos\Theta$. Werte für K und K/E. Tabelle III: Funktionen $\overline{G}(q, z)$ und $\overline{H}(q, z)$ laufend nach z (mit Angabe der zugehörigen Werte Θ). Tabelle IV: Funktionen $\overline{G}(q, z)$ und $\overline{H}(q, z)$ laufend nach q. Tabelle V: Tafeln für die Umrechnung zwischen dem LEGENDREschen Modul Θ und dem JACOBIschen Parameter q. Tabelle VI: Tafeln der Koeffizienten für die Interpolation nach EVERETT.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegen zwei Prospekte des Springer-Verlages, Berlin - Göttingen - Heidelberg, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.